LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

SUR UN DÉPLACEMENT DE FRANGES ENREGISTRÉ SUR UNE PLATE-FORME EN ROTATION UNIFORME

Par MM. A. DUFOUR et F. PRUNIER.

Sommaire. — Dans une première série d'expériences, ici accessoires, mais qu'il fallait cependant réaliser, nous avons utilisé un circuit optique tout entier solidaire de la plate-forme tournante comme dans les travaux antérieurs de Sagnac. Dans ces conditions nous avons constaté que les déplacements de franges observés sont les mêmes à 6 % près, que la source lumineuse et le récepteur photographique soient entraînés dans la rotation de la plate-forme, comme dans les expériences de Sagnac, ou qu'ils restent fixes dans le laboratoire.

La seconde série d'expériences décrite ici a eu pour but d'étudier le déplacement des franges dû à la rotation, dans des conditions entièrement nouvelles caractérisées par le fait que le circuit optique des deux faisceaux interférents superposés est formé de deux parties en série, dont l'une reste fixe par rapport au laboratoire tandis que l'autre est solidaire de la plate-forme en rotation. Le déplacement des franges, obtenu dans ces conditions nouvelles, a été celui que permet de prévoir la théorie classique.

Dans le cas où le circuit optique est en entier solidaire du disque tournant, comme dans les expériences de Sagnac, l'observateur n'a pas le moyen de faire un choix entre les interprétations du déplacement des franges obtenues données respectivement par la théorie classique et par les théoriciens relativistes. Mais, dans le cas où il existe une partie du circuit qui reste fixe par rapport au laboratoire, le théoricien relativiste ne peut rester d'accord avec le théoricien classique, ni avec les résultats observés, en supposant, comme il l'avait fait jusqu'ici, que le centre, où il doit se supposer placé pour faire le calcul de l'expérience, peut être choisi arbitrairement sur la plate-forme tournante. Ce centre doit obligatoirement être confondu avec le centre de rotation de la plate-forme.

I. — Expériences dans lesquelles le circuit optique est tout entier solidaire de la plate-forme tournante.

1. **Expériences préliminaires.** — Afin de nous familiariser avec les difficultés expérimentales, nous avons d'abord répété l'expérience de Sagnac [1] dans laquelle tout l'appareil optique est, comme l'on sait, entraîné par le disque en rotation uniforme.

Nous avons employé, à cet effet, les miroirs mêmes qui avaient été utilisés par Sagnac dans ses mémorables expériences, mais la plate-forme qui nous a servi était deux fois plus large que la sienne. Elle avait ici 1 m de diamètre et pouvait tourner à une vitesse mesurable, ne dépassant pas toutefois 5 tours/sec, dans un sens, puis dans l'autre, autour de son axe de révolution disposé verticalement. Cet axe était défini par la droite passant par les pointes terminales de l'arbre rigide supportant le disque, pointes pivotant dans des godets graisseurs portés par un bâti solide scellé au mur du laboratoire. Ce montage supprimait tout jeu lors de la rotation de l'appareil et permettait toutefois l'entretien facile de son mouvement sans vibrations nuisibles. Le couple moteur était fourni par une petite dynamo fixée au même mur; la transmission de ce couple était obtenue par l'intermédiaire d'une courroie agissant sur une poulie solidaire de l'arbre de la plate-forme. Ce matériel est resté le même pour toutes les expériences dont il sera ici question.

La figure 1 donne le schéma du dispositif optique porté tout entier par le disque et utilisé dans ces essais préliminaires. Il est à peu de chose près identique à celui de Sagnac et ne présente rien d'original. Le séparateur de Sagnac n'ayant pu être retrouvé a été remplacé ici par la glace, séparatrice et réceptrice R, non argentée, et recevant les rayons sous une incidence assez grande.

La lumière issue de la source S traverse le collimateur formé de l'ensemble de la lentille L et du

diaphragme o en son foyer, puis, après réflexion auxiliaire en m, vient donner les deux faisceaux interférents qui se séparent en C, centre du disque, pour parcourir en sens inverses, l'un le chemin CMM'M"M'''C et l'autre le chemin CM'''M"M'MC.

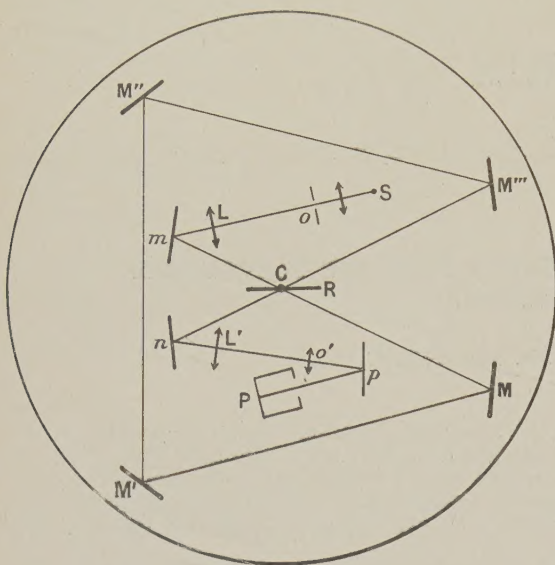


Fig. 1.

Après leur réunion en C, ces faisceaux sont renvoyés par le miroir auxiliaire n dans la lunette L'o' qui permet d'obtenir, après une dernière réflexion auxiliaire en p, les franges réelles sur la plaque photographique p.

Par suite de la faible intensité disponible sur la plaque photographique, nous avons presque toujours dû opérer en lumière blanche avec des plaques *Agfa* panchromatiques de grande sensibilité. Il en résulte que les mesures de déplacements de franges faites sur tous nos clichés sont évidemment affectées d'erreurs peu importantes et variables en rapport avec la composition spectrale de la lumière utilisée et avec la sensibilité sélective des émulsions des diverses séries de plaques pour les différentes longueurs d'onde. Malgré cette imperfection, la signification des résultats obtenus reste ici entière au point de vue qualitatif. D'ailleurs, même au point de vue quantitatif, les variations extrêmes des résultats numériques d'une même série d'enregistrements ne dépassant jamais 12 pour 100 de la valeur moyenne, l'ordre de grandeur de celle-ci reste donc valable et doué de signification.

Les expériences faites avec le dispositif de la figure 1 nous ont justement servi à étalonner les indications des enregistrements photographiques en fonction de la valeur de l'effet Sagnac en lumière blanche pour les plaques particulières que nous avons utilisées. Pour chaque sens de rotation, la durée de pose était d'une fraction de seconde. La connaissance de la vitesse de rotation constante pendant les poses était obtenue par la mesure du nombre de tours effectués par la plate-forme durant 2 min relevées à un compteur à seconde. On enregistrait sur la même plaque les franges obtenues, d'abord pour un sens de rotation, puis pour l'autre sens. La commande magnétique à distance de deux petits volets permettait de protéger successivement chaque moitié de la plaque contre l'action de la lumière. On obtenait ainsi les deux systèmes de franges correspondant aux deux sens de rotation séparés l'un de l'autre par une ligne fine facilitant leur comparaison. La mesure des interfranges et du décalage des franges a été effectuée par pointés à la machine à diviser.

La moyenne de neuf enregistrements de l'effet Sagnac ordinaire nous a donné ainsi pour valeur de cet effet 0,082 interfrange pour une vitesse angulaire de 1 tour/sec pour les deux sens de rotation, la source lumineuse étant un filament de lampe à incandescence moyennement poussé.

L'ordre de grandeur ainsi observé pour l'effet Sagnac ordinaire apparaît bien d'accord avec ce qu'on pouvait prévoir en tenant compte de la position du centre de gravité approximatif dans le spectre, de l'action de la lumière sur les plaques panchromatiques utilisées; ce centre de gravité définit d'ailleurs la longueur d'onde efficace pour le calcul du phénomène. Dans la formule de Sagnac, qui donne en fraction d'interfrange la valeur δ du décalage total des franges pour les deux sens de rotation $\delta = \frac{16\pi NA}{C\lambda}$, N est le nombre de tours/sec de la plate-forme, A est la valeur de l'aire intérieure au parcours fermé CMM'M"M'''C de la figure 1, c est la vitesse de la lumière et λ la longueur d'onde utilisée. Dans nos expériences, l'aire A était d'environ 2840 cm². Les résultats expérimentaux obtenus nous ont ainsi permis d'en déduire pour la longueur d'onde efficace λ une valeur d'environ 0,57 μ quand la source est constituée par un filament incandescent moyennement poussé, 0,54 μ s'il est plus brillant, 0,45 μ si cette lumière blanche a traversé un écran Schott en verre bleu, ne laissant passer que la région du spectre allant de 0,5 à 0,36 μ.

2. **Expériences faites avec une source lumineuse restant fixe dans le laboratoire.** — La première question que nous avons envisagée a été de rechercher si l'entraînement de la source qui crée la lumière était indispensable à la production du phénomène.

Nous avons alors réalisé le dispositif dont le schéma est donné par la figure 2. Les caractéristiques de ce montage sont d'utiliser la lumière d'une source fixe dans le laboratoire et d'envoyer cette lumière sur les parcours optiques solidaires de la plate-forme en rotation, sous la forme d'éclairs se répétant à

chaque tour du disque quand il passe dans une même position.

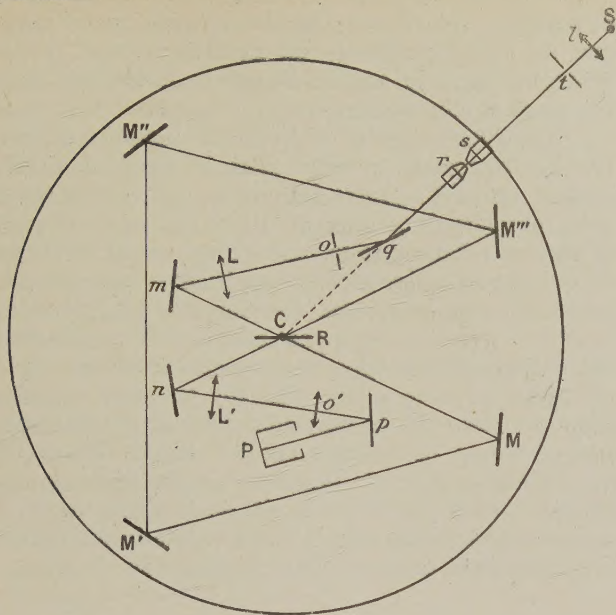


Fig. 2.

A cet effet, la lumière issue de la source S traverse la lentille l, le diaphragme t et l'objectif de microscope s, tous ces organes étant maintenus fixes dans le laboratoire. Un autre objectif de microscope r, identique au précédent, est solidaire de la plate-forme tournante et donne en o, grâce à la réflexion auxiliaire q, une image du diaphragme t égale à celui-ci, quand la plate-forme a justement la position indiquée dans la figure. La droite $Ssrq$ est orientée de manière que son prolongement passe par le centre C de rotation, afin que les objectifs r et s travaillent dans de bonnes conditions au moment de l'éclair.

Si v est la vitesse linéaire de l'objectif r et g son grandissement, la vitesse linéaire de l'image du diaphragme t sur le diaphragme o aura pour valeur approchée vg. La durée τ de l'éclair sera donc de l'ordre de $\tau = \frac{vg}{d}$ si d est le diamètre, ici commun, des diaphragmes o et t. Dans nos expériences, $Cr = 45$ cm; $g = 10$; $d = 1{,}5$ mm, ce qui donne, pour une vitesse angulaire de l'ordre de 4 tours/sec, $\tau = 1{,}3 . 10^{-5}$ sec environ.

Ainsi, même à cette vitesse, à chaque éclair, la durée τ du faisceau lumineux utile est bien supérieure au temps de parcours de la lumière le long du circuit optique. Celui-ci a, en effet, environ 3 m de long; il est par conséquent parcouru par la lumière en 10^{-8} sec. Chaque faisceau fait donc au moins 1300 fois le tour du circuit optique durant un éclair. Les franges ont ainsi largement le temps de se former sur la plaque photographique. Toutefois, pour obtenir une impression photographique suffisante dans ces conditions expérimentales, les poses devront être plus longues que dans le cas de la source entraînée. Il a fallu poser ici environ 5 min pour chaque sens de rotation, en utilisant la même source de lumière blanche que ci-dessus.

Les enregistrements que nous avons réalisés ainsi montrent un décalage des franges net et tout à fait comparable à celui fourni par le montage classique de Sagnac. La moyenne des résultats des mesures faites sur une série de neuf clichés a conduit à la valeur 0,088 interfrange pour le décalage des franges correspondant aux deux sens de rotation et à une vitesse angulaire de la plate-forme de 1 tour/sec. Les écarts des résultats individuels atteignent au plus 15 pour 100 de cette moyenne. On voit qu'à 5 ou 6 pour 100 près, le décalage moyen observé est ici de même valeur que celui obtenu ci-dessus avec le montage ordinaire de Sagnac.

Les spécimens d'enregistrements reproduits ici dans la figure 3 représentent, agrandis quatre fois, deux des clichés originaux. Les sens de rotation relatifs respectivement aux parties supérieures et inférieures d'un même cliché sont opposés. Le cliché 57 (vitesse de rotation 4,13 tours/sec) montre l'effet Sagnac obtenu avec le dispositif classique où la source est entraînée par le disque Le cliché 45 (vitesse de rotation 4,39 tours/sec) est un enregistrement obtenu dans les conditions actuelles, c'est-à-dire quand la source est fixe dans le laboratoire. On voit que le décalage des franges est sensiblement le même dans ces deux épreuves.

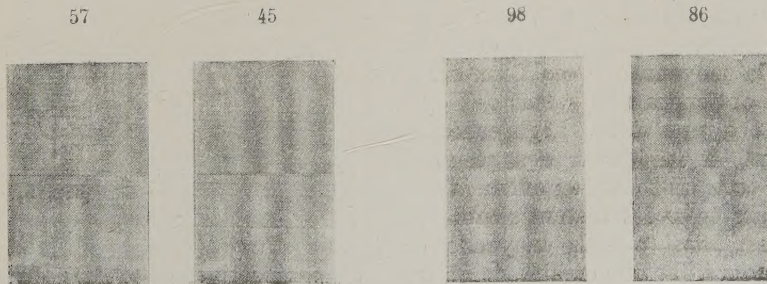


Fig. 3.

Fig. 4.

En résumé, ces dernières expériences démontrent qu'il est permis d'utiliser pratiquement la lumière émise par une source n'appartenant pas au système du disque mobile, lors de l'étude de la propagation de la lumière sur ce disque pour un observateur entraîné dans la rotation, notable quoique assez lente, de la plate-forme, sans que les résultats expérimentaux soient modifiés pour lui d'une manière appréciable.

3. **Expériences faites en utilisant une source et un enregistreur photographique restant fixes dans le laboratoire.** — On pouvait même se demander si le phénomène interférentiel restait le même pour l'observateur entraîné dans la rotation et pour un observateur maintenu fixe dans le laboratoire.

Pour effectuer cette étude, le dispositif représenté schématiquement dans la figure 2 a subi les modifications suivantes : le miroir p étant supprimé, la lunette formée de l'objectif L′ et de l'oculaire o' ainsi que la chambre photographique P ont été enlevées de la plate-forme et fixées à un support immobile scellé au mur du laboratoire, de manière à se trouver placées en ligne droite aux endroits convenables sur le trajet de la lumière réfléchie par le miroir n au moment de l'éclair. Dans cette disposition, la source lumineuse et l'observateur opérant la photographie des franges avec lunette et chambre photographiques, sont fixes tous deux par rapport au laboratoire.

Mais pendant la durée de l'éclair, très courte quoique non nulle, la plate-forme a tourné d'un petit angle et les franges obtenues sur la plaque photographique ont subi une légère modification car lunette et plaque sont immobiles, tandis que l'interféromètre tourne. Pour éliminer dans la mesure du possible l'effet de cette cause d'erreur, nous avons utilisé le changement connu de signe de l'effet Sagnac quand on fait pivoter d'un petit angle ε autour d'un axe vertical la glace séparatrice R de part et d'autre de sa position moyenne fournissant la frange centrale étendue dans tout le champ interférentiel. Pour les clichés obtenus quand l'angle ε est positif, le décalage des franges dû à la rotation de l'interféromètre durant l'éclair s'ajoutera, par exemple, à l'effet Sagnac. Au contraire, pour les clichés obtenus quand l'angle ε est négatif, le décalage des franges dû à la rotation se retranchera de l'effet Sagnac. En prenant la moyenne de ces deux séries d'enregistrements, on obtiendra une valeur de l'effet Sagnac correspondant à une durée négligeable de l'éclair. Naturellement, la précision des résultats se ressent un peu de cette difficulté supplémentaire. Malgré cela, les valeurs trouvées restent semblables aux précédentes. C'est ainsi que la moyenne du décalage des franges donné par une dizaine de clichés dans chaque série pour les deux sens de rotation et pour une vitesse angulaire de 1 tour/sec est égale à 0,098 interfrange pour un certain signe de ε, et à 0,084 interfrange pour l'autre signe de ε. La moyenne de ces deux valeurs est 0,091 interfrange, ne différant que de 3 à 4 pour 100 du nombre obtenu précédemment dans le cas où la source lumineuse était fixe dans le laboratoire.

Les spécimens 98 et 86 (vitesse angulaire d'environ 3,7 tours/sec), donnés dans la figure 4, représentent agrandis quatre fois, deux des clichés originaux obtenus dans ces conditions, et pour lesquels le sens de rotation de la plate-forme est le même en ce qui concerne les régions supérieures des enregistrements; pour les parties inférieures de ces spécimens le sens de rotation est opposé au précédent. L'angle ε était d'un certain signe pour le cliché 86, du signe contraire pour le cliché 98. On se rend compte, à simple vue, que la moyenne des valeurs absolues des décalages de franges sur les clichés 86 et 98 est du même ordre de grandeur que le décalage des franges décelé par le cliché 45 de la figure 3.

Ce résultat est lié au fait que la plate-forme tourne d'un très petit angle pendant la durée de l'éclair.

II. — Expériences dans lesquelles le circuit optique comprend, en série, une partie fixe dans le laboratoire et une partie entraînée par la plate-forme en rotation.

1. **Essais préliminaires.** — La figure 5 donne,

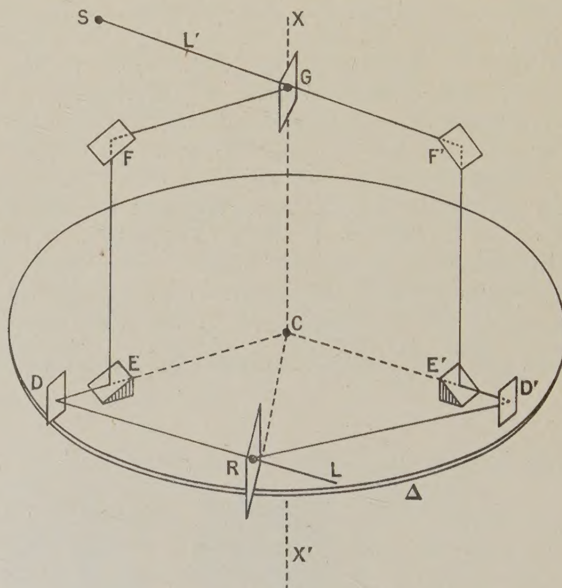


Fig. 5.

en perspective, le schéma du premier dispositif que nous avons essayé.

La lumière issue de la source S traverse le collima-

teur L′ non dessiné et vient fournir, par l'action de la glace séparatrice G, les deux faisceaux interférents à trajets distincts, l'un GFEDR et l'autre GF′E′D′R. Les franges sont observées dans la lunette L.

La source S, le collimateur L′ et les miroirs G, F, F′ sont fixes dans le laboratoire. Les autres miroirs, ainsi que la lunette L et la plaque photographique sont portés par la plate-forme et tournent avec elle. Par conséquent, seules les portions EDR et E′D′R du parcours de la lumière sont solidaires du disque en rotation. Enfin, la disposition des miroirs est supposée parfaitement symétrique par rapport au plan GCR dans lequel la droite CG est confondue avec l'axe de rotation XX' du disque.

L'expérience réalisée conformément à ce montage n'a pu conduire à des enregistrements effectifs, car il a fallu opérer en lumière monochromatique dont l'intensité aurait été insuffisante ici pour impressionner la plaque sans durées de pose excessives, et surtout parce que les moindres trépidations du sol brouillaient le système de franges, ce qui aurait supprimé toute signification à la discussion des résultats.

2. **Dispositif effectivement utilisé.** — Les inconvénients précédents résultaient du fait que les deux faisceaux interférents suivaient des chemins distincts. Ils ont disparu quand nous avons obligé les deux faisceaux à suivre le même parcours en sens opposés.

La figure 6 donne, en perspective, le schéma du montage expérimental qui nous a servi. Le colli-

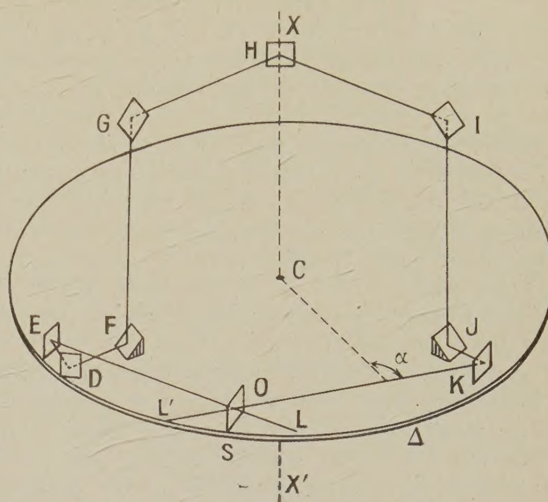
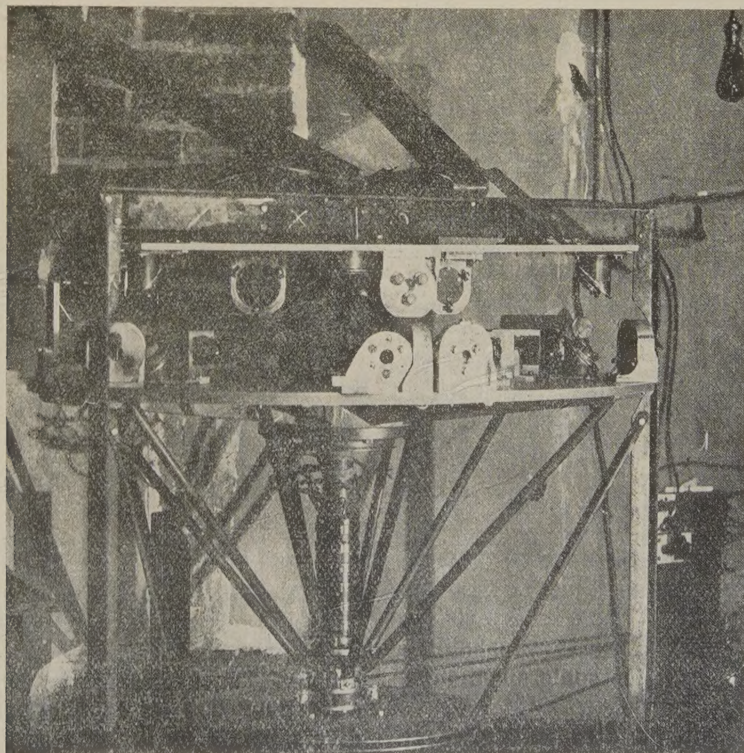


Fig. 6.

mateur L′ et la lunette L non dessinés, la glace S (séparatrice et réceptrice) où est supposé se trouver l'observateur O, les miroirs plans K, J, D, E, F sont tous solidaires de la plate-forme et tournent avec


Fig. 7.

elle. La glace plane S est à peu près à égale distance des miroirs F et J. D'autre part, les longueurs radiales CF et CJ sont égales entre elles. Les miroirs plans G, H, I restent fixes dans le laboratoire. Pour tous les miroirs autres que F, G, I, J, les plans d'incidence sont horizontaux, parallèles à la plate-forme. Seuls les plans d'incidence des miroirs F, G, I, J sont verticaux et contiennent l'axe de rotation XCX'. Ces derniers miroirs sont inclinés à 45° sur la verticale, le miroir F se trouvant parallèle au miroir G, et le miroir J parallèle au miroir I au moment de l'éclair en lumière blanche fourni par une source non dessinée, fixe dans le laboratoire et constituée par le cratère positif d'un arc à charbons. Enfin, les longueurs FG et IJ sont parallèles à l'axe de rotation, égales entre elles et de valeur 10 cm.

L'un des faisceaux interférents suit le chemin SKJ sur le disque, puis JIHGF (parcours restant fixe dans le laboratoire), et revient par le trajet FDES effectué sur le disque. L'autre faisceau marche en sens inverse du précédent sur le même parcours. Les franges sont enregistrées sur une plaque photographique liée à la plate-forme Δ et située dans le plan focal de la lunette L.

La figure 7 reproduit une photographie du dispositif expérimental tel qu'il nous a servi. La source lumineuse n'y est pas visible, se trouvant trop à gauche, hors du champ. Le disque tournant, d'axe vertical, est surmonté d'une seconde plate-forme fixée au bâti scellé au mur du laboratoire et qui porte les miroirs de l'étage supérieur. Ceux-ci sont, en réalité, au nombre de cinq et non de trois comme l'indique la figure schématique 6. En effet, dans l'impossibilité évidente de placer un miroir plan fixe H sur l'axe même de rotation de la plate-forme tournante, ce miroir unique H a été remplacé, en fait, par trois miroirs plans qu'on aperçoit dans la figure 7 et qui permettent aux faisceaux interférents de contourner l'arbre de la plate-forme mobile, pour ne pas être interceptés par lui. Mais comme le parcours supérieur des faisceaux est fixe dans le laboratoire, et que les azimuts des plans d'incidence des miroirs G, I sont restés inchangés, il est plus commode d'utiliser dans le raisonnement (et c'est ce que nous ferons), le miroir plan fictif H de la figure 6, en remplacement des trois miroirs réels fixes de la figure 7 qui lui sont équivalents dans l'expérience.

On peut se demander toutefois s'il est raisonnable d'espérer obtenir des franges utilisables avec un tel interféromètre déjà assez compliqué et dont les deux parties sont en mouvement relatif notable. Il faut donc, de toute nécessité, arriver à obtenir des franges suffisamment définies, restant inchangées pendant la durée des éclairs, et ceci malgré le mouvement de la plate-forme tournante.

Ces deux conditions ont pu être satisfaites en constituant l'étage supérieur du dispositif par un nombre impair de miroirs plans et en dotant l'appareil du miroir plan supplémentaire D. Voici les raisons qui ont motivé de telles dispositions :

1° Pendant la durée, courte, mais non nulle, de l'éclair lors de la rotation de la plate-forme, la direction du faisceau lumineux incident ne change guère, mais les miroirs F et J solidaires du disque tournant se sont un peu déplacés par rapport aux faisceaux qu'ils reçoivent respectivement de l'étage supérieur. Or, les franges utilisées sont localisées à l'infini et chacune d'elles est fournie par tout un groupe de rayons. Pour que ces franges ne subissent pas de modifications, il faut que l'ensemble des rayons de chaque faisceau interférent reste dans les mêmes positions relatives par rapport aux miroirs qu'ils rencontrent, condition qui concerne tout particulièrement les miroirs à 45° F et J solidaires du plateau tournant. Or, si l'on observe en J la tache lumineuse fournie par le faisceau marchant dans le sens de F à G vers J, et la tache lumineuse en F fournie par le faisceau marchant en sens contraire de J à I vers F, l'on constate que ces taches lumineuses se déplacent un peu par suite de la rotation de la plate-forme mobile Δ, et en sens inverses quand le miroir fictif H est remplacé par un nombre pair de miroirs plans, deux par exemple, pour transmettre la lumière de G à I et de I à G. Dans de telles conditions, on peut bien obtenir des franges (le miroir D étant alors supposé inexistant), mais ces franges se rétrécissent ou s'élargissent suivant le sens de la rotation, même très lente, imprimée à la plate-forme mobile. Ces modifications de franges résultent du fait que le groupe des rayons lumineux ne rencontre pas chacun des miroirs F et J toujours dans les mêmes positions relatives lors de la rotation de la plate-forme.

Mais si le parcours optique de G à I et de I à G est réalisé cette fois dans l'étage supérieur par un nombre impair de miroirs plans, il y a changement de sens du déplacement en F ou J pour l'un des faisceaux, de sorte que pendant la durée de l'éclair, les régions d'arrivée des faisceaux sur les miroirs F et J accompagnent bien ces derniers pendant leur rotation. Et les franges qu'on obtient alors (le miroir D étant supposé remis en place, on verra pourquoi plus loin) restent inchangées pendant la durée de l'éclair si la vitesse de rotation est négligeable, ainsi que le montre le cliché 142 (ici agrandi environ quatre fois) de la figure 9.

2° Si le miroir plan D n'existait pas, le nombre des miroirs situés sur les trajets lumineux serait impair, ici égal à 9; et l'on sait que dans ce type d'interféromètre, le nombre des miroirs doit être pair pour que les rayons correspondants se retrouvent sur la glace séparatrice. La présence de ce miroir est donc nécessaire pour que les rayons qui se sont séparés aux divers points de la lame séparatrice ne fournissent pas à leur retour sur cette lame deux faisceaux retournés l'un par rapport à l'autre.

3° Mais l'existence du miroir supplémentaire D est rendue obligatoire pour un autre motif : son rôle est aussi de compenser la modification des points d'impact des rayons sur les miroirs à 45° F et J, modification due au déplacement de ces miroirs pendant la durée des parcours de la lumière au-dessus de la plate-forme mobile Δ, dans l'étage supérieur porté par une autre plate-forme fixe dans le laboratoire.

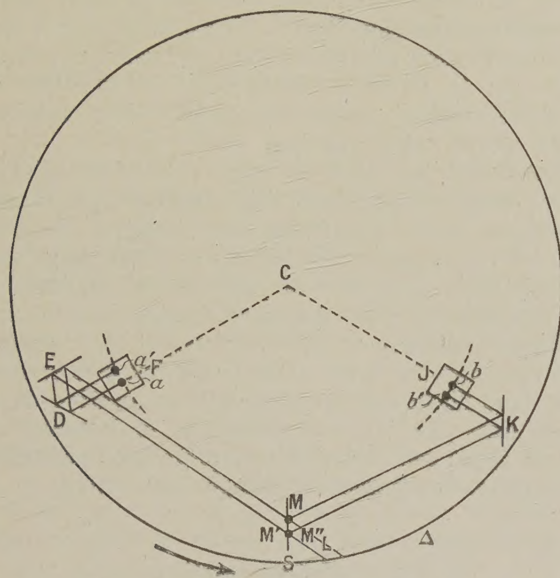


Fig. 8.

La figure 8 représente, à cet effet, la plate-forme tournante vue en plan. En a et b sont marqués les points respectifs de départ et d'arrivée des faisceaux interférents, réduits ici à un seul rayon, la plate-forme étant supposée immobile, et le réglage étant tel que les rayons de retour provenant d'un rayon incident viennent se couper sur la glace séparatrice. Dans ces conditions, le rayon circulant dans le sens direct part de M, arrive en a sur le miroir F, monte à l'étage supérieur, redescend en b sur le miroir J et revient en M. Le rayon circulant dans le sens opposé arrive en b sur le miroir J, monte à l'étage supérieur, redescend en a sur le miroir F et revient en M. La frange correspondante est vue dans la direction ML.

Supposons maintenant que le disque Δ soit animé de la vitesse angulaire ω dans le sens indiqué par la flèche. Soient encore a et b, dans ces nouvelles conditions, les points de départ respectifs des rayons interférents se dirigeant vers l'étage supérieur.

Faisons abstraction pour l'instant dans ce qui suit, de ce qui peut se passer dans ce parcours supérieur des rayons.

Pendant la durée du trajet de la lumière en dehors du disque Δ, celui-ci aura tourné d'un certain angle. Le rayon parti de a ne reviendra plus en b, mais en b' sur le miroir J et suivra ensuite le chemin b'KM' supposé tracé sur la plate-forme Δ elle-même. Le rayon parti de b vers l'étage supérieur ne reviendra plus en a, mais en a' sur le miroir F, et suivra ensuite le chemin a'DEM'' supposé tracé sur la plate-forme Δ elle-même. Si la glace séparatrice est à égale distance des miroirs F et J, l'on a $aa' = bb'$.

Il convient de remarquer que les rayons de retour gardent une même direction, à condition de les supposer tracés sur la plate-forme Δ, que celle-ci tourne ou ne tourne pas.

De ce parallélisme et de la condition $aa' = bb'$, on déduit que les rayons de retour b'KM' et a'DEM'' coupent la glace séparatrice au même point, de sorte que M' et M'' sont confondus. Il en résulte aussi que la frange à l'infini correspondante reste, sur le disque Δ, dans la même direction ML que lorsque la plate-forme était immobile. Mais la question qui se pose aussitôt est de savoir si l'aspect de la frange est resté inchangé.

Deux hypothèses sont alors à envisager :

Première hypothèse. — La vitesse de la lumière sur la plate-forme reste constante et égale à c, que cette plate-forme soit immobile ou en mouvement. La fréquence lumineuse conservant sur le disque une valeur constante, l'on déduit, dans ce cas, du parallélisme signalé ci-dessus, que les rayons de retour arrivant en M'M'' sont, vis-à-vis l'un de l'autre, dans les mêmes conditions relatives de phases que si la plate-forme ne tournait pas. Il en résulte que les franges enregistrées par la plaque photographique ne sont modifiées ni en aspect, ni en position par le seul fait de la rotation de la plate-forme Δ.

Deuxième hypothèse. — La vitesse de propagation de la lumière sur la plate-forme tournante dépend du sens dans lequel elle chemine. Dans ce cas, la marche des rayons, tracée sur la plate-forme, ne change pas, il est vrai, mais un nouveau facteur intervient : c'est le retard apporté entre les rayons lumineux par l'inégalité des vitesses de propagation de la lumière, retard qui modifie l'ordre d'interférence de la frange visée dans la direction restée cependant constante ML. Il en résulterait donc ici l'équivalent d'un déplacement effectif des franges sur la plaque photographique.

Mais, en définitive, on voit que, dans ces deux hypothèses, la modification des positions des points de retour a' et b' des rayons, résultant de la rotation, ne peut, *à elle seule*, déterminer une variation quelconque de l'aspect ou de la position des franges sur la plaque photographique solidaire de la plate-forme mobile.

Dans le cas plus général où les deux rayons interférents quitteraient l'un après l'autre les points a et b, un raisonnement analogue au précédent montrerait que les points M' et M'' ne seraient plus confondus, mais la conclusion donnée ci-dessus serait toujours valable.

Enfin, il convient de signaler l'existence possible d'un effet d'aberration le long des trajets verticaux FG et JI de la figure 6. Mais la vitesse linéaire des miroirs entraînés F et J ne dépassant pas dans nos expériences 9 m/sec, l'obliquité qui pourrait en résulter pour les rayons FG ou JI n'atteint que 6 millièmes de seconde d'arc, et est considérée ici comme tout à fait négligeable.

En résumé, le dispositif ainsi complété ne détermine aucune modification dans l'aspect et la position des franges quand la vitesse angulaire de la plate-forme Δ dans un sens ou dans l'autre, est extrêmement petite. Il en résulte que si des expériences, faites quand la vitesse angulaire est notable, donnent une variation des franges sur la plaque photographique solidaire du disque mobile, il faudra en rechercher la cause dans l'influence du facteur vitesse relative du disque par rapport au laboratoire dans lequel il tourne.

3. **Résultats expérimentaux**. — Nous avons effectué dans les conditions précédentes, deux séries d'enregistrements, l'angle FCJ étant égal à 120°.

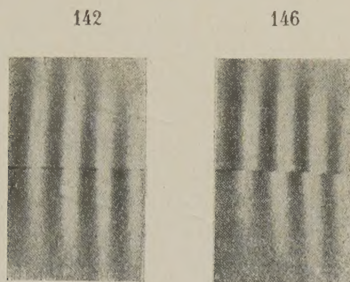


Fig. 9.

La seconde série ne diffère de la première que par les positions des miroirs verticaux de l'étage supérieur. Les vitesses de rotation ont varié de 1,43 à 4 tours/sec. Les poses successives dans les sens opposés de rotation ont été croisées de manière à éliminer autant que possible les variations accidentelles des franges pendant les 5 min que durait en tout chaque pose pour un sens de rotation. La source lumineuse était comme précédemment le cratère positif d'un arc à charbons. Les plaques étaient les mêmes que ci-dessus, des *Agfa* panchromatiques sensibles.

Le cliché 146 de la figure 9 représente, agrandi quatre fois, l'un des enregistrements réalisés, la vitesse de rotation étant d'environ 3,6 tours/sec. Les franges du haut et celles du bas de cette épreuve correspondent respectivement à des sens opposés de rotation de la plate-forme mobile Δ. Le décalage des deux systèmes de franges, nul pour le cliché 142 obtenu comme on l'a vu plus haut quand la vitesse de rotation est négligeable, est au contraire très apparent pour le cliché 146 correspondant à une vitesse angulaire notable.

Les mesures des divers clichés utilisés, faites à la machine à diviser, ont fourni les résultats suivants exprimant en interfranges le décalage mutuel δ des deux systèmes de franges pour les deux sens de rotation et une vitesse angulaire de 1 tour/sec pour la plate-forme mobile. La première série d'expériences a donné pour δ, comme moyenne des mesures de 15 enregistrements, la valeur $\delta = 0{,}058$. La seconde série, composée de 7 enregistrements, a fourni la valeur $\delta = 0{,}054$. Dans la première série, les valeurs individuelles de δ s'échelonnent entre $\delta = 0{,}052$ valeur minima et $\delta = 0{,}071$ valeur maxima. Celles de la seconde série, moins bonne que la première, restent entre $\delta = 0{,}046$ valeur minima et $\delta = 0{,}078$ valeur maxima.

Ces expériences mettent donc en évidence l'existence, dans ces conditions, d'un décalage des franges d'environ 0,056 interfrange en lumière blanche, pour les deux sens de rotation et une vitesse angulaire de 1 tour/sec. Bien que la précision des opérations ne permette pas de dépasser l'approximation de quelques pour cent sur la valeur moyenne, le phénomène est hors de doute et sa cause doit être recherchée dans l'influence de la vitesse de rotation de la plate-forme sur la propagation de la lumière, en faisant appel aux diverses interprétations possibles. C'est ce que nous allons envisager maintenant.

III. — Interprétation des résultats expérimentaux.

Rappelons d'abord les éléments des théories qu'il y a lieu d'appliquer ici.

La théorie classique suppose, comme l'on sait, que pour l'observateur lié au disque, la vitesse de la lumière en un point du disque tournant diffère de la vitesse c de la lumière dans le laboratoire, d'une quantité égale à $\pm v$, si v représente en valeur absolue la projection de la vitesse linéaire d'entraînement du point considéré sur la plate-forme, sur l'élément de parcours envisagé.

Nous utiliserons comme théorie relativiste de ces phénomènes, celle donnée par M. Langevin [2] en 1921 et rappelée par lui plus récemment [3]. Dans cette forme d'interprétation, l'observateur entraîné par le disque en mouvement est supposé adopter un temps central t qui est celui des observateurs galiléens par rapport auxquels le centre O choisi sur la plate-forme est immobile. (Remarquons en passant que ce centre choisi O n'est pas nécessairement le centre C de rotation de la plate-forme, mais qu'il est un point quelconque, arbitrairement choisi sur le disque.) La forme que prend l'invariant fondamental ds^2 implique une anisotropie dans la propagation de la lumière dont la vitesse varie avec la direction entre $C + \omega r$ et $C - \omega r$ au premier ordre d'approximation en ω. Dans ces expressions, ω est la vitesse angulaire de rotation de la plate-

forme, r est la distance du centre O arbitrairement choisi, au point de passage, sur le disque, du rayon lumineux considéré. M. Langevin trouve ainsi que la durée dt de parcours lumineux de longueur dl est donnée pour un sens de circulation de la lumière par l'expression $dt = \frac{dl}{c} + \frac{2\omega}{c^2} dA$, où dA est l'aire du triangle de base dl et de sommet le centre O arbitraire choisi. En intégrant le long du parcours lumineux fini solidaire du disque tournant, et en tenant compte de l'autre sens de propagation, on peut en déduire la valeur du déplacement des franges attribuable au parcours considéré.

En définitive, les deux théories conduisent, comme l'on sait, respectivement aux prévisions suivantes pour ce qui concerne le trajet fini solidaire du disque tournant : le décalage attendu de ce chef pour les franges est, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnel à une aire ayant pour base le chemin parcouru par la lumière sur la plate-forme mobile, mais dont le sommet n'est pas le même pour ces deux théories : en théorie classique, ce sommet est le point C centre de rotation de la plate-forme, et est indépendant de la position du point O, où est supposé se trouver l'observateur classique solidaire de cette plate-forme mobile; d'après la théorie relativiste rapportée plus haut, ce sommet est arbitraire; nous le choisissons, comme de juste, sur la glace S au même point O, où sera supposé se placer également l'observateur relativiste solidaire de la plate-forme mobile.

Nous avons alors à faire l'application de ces considérations aux deux cas suivants :

1° *Le circuit optique, fermé, est en entier solidaire du disque tournant.* — C'est le cas bien connu des expériences de Sagnac.

Les deux théories sont ici d'accord entre elles et d'accord avec l'expérience, en ce qui concerne le décalage total δ des franges enregistré sur le disque tournant. Toutefois, le théoricien classique et le théoricien relativiste ne sont pas d'accord entre eux sur la répartition qu'ils font, de la cause du phénomène, entre les divers éléments constitutifs du parcours total. Mais pour que l'opérateur physicien qui fait l'expérience ait la possibilité de faire un choix entre ces deux interprétations théoriques, il faudrait qu'il effectuât une mesure expérimentale directe de la vitesse de la lumière sur la plate-forme en rotation, opération qui est évidemment impossible à réaliser avec la précision nécessaire, dans l'état actuel de la technique.

2° *Une partie du circuit optique, fermé, est solidaire du disque tournant, l'autre partie du circuit optique restant fixe par rapport au laboratoire.* — Dans ces conditions, qui sont celles de nos expériences, le décalage des franges est dû évidemment au parcours optique solidaire du disque tournant. Nous allons calculer les valeurs qui lui reviennent d'après les deux théories.

Dans les expériences faites conformément au montage de la figure 6, l'aire comprise dans le secteur ayant pour base le trajet lumineux entraîné FDEOKJ et pour sommet le centre C de rotation de la plate-forme avait pour valeur totale algébrique (car l'aire du petit triangle de base ED dans cette figure doit être comptée comme négative), $A' = 1777$ cm² environ, tandis que l'aire du secteur de même base du trajet lumineux FDEOKJ et dont le sommet est le point O où se trouve l'observateur entraîné par le disque, avait pour valeur totale algébrique

$$A = 168 \text{ cm}^2 \text{ environ.}$$

En introduisant ces valeurs numériques dans l'expression du décalage δ des franges, on trouve avec $\lambda = 0{,}56\,\mu$, pour les deux sens de rotation et pour une vitesse angulaire de 1 tour/sec,

$$\delta = \frac{16\pi A'}{e\lambda} = 0{,}053 \text{ interfrange,}$$

d'après la théorie classique,

$$\delta = \frac{16\pi A'}{e\lambda} = 0{,}0055 \text{ interfrange,}$$

d'après la théorie relativiste; soit une valeur de δ environ dix fois plus petite, d'après cette dernière théorie que d'après la précédente.

La théorie relativiste semble donc être en désaccord complet avec la théorie classique et aussi avec le résultat fourni par l'expérience. Mais c'est que, comme paraissaient le permettre les notes de Langevin rapportées plus haut, nous avions considéré que le centre où doit être supposé placé le théoricien relativiste peut être arbitrairement choisi. La théorie relativiste se retrouve au contraire d'accord avec la théorie classique et avec l'expérience si ce centre doit obligatoirement être confondu avec le centre de rotation du disque, le seul point du disque qui puisse être l'origine permanente d'axes galiléens non soumis au mouvement de rotation de l'ensemble. C'est d'ailleurs la conclusion à laquelle M. Langevin nous a dit être arrivé après avoir eu connaissance du résultat de nos expériences.

Manuscrit reçu le 1er août 1942.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] SAGNAC, *Journal de Physique*, 1914, t. 4, p. 177.
[2] LANGEVIN, *C. R. Acad. Sci.*, 1921, t. 173, p. 831.
[3] LANGEVIN, *C. R. Acad. Sci.*, 1937, t. 205, p. 304.

(*Voir* Note page suivante.)

NOTE.

M. Langevin nous fait remarquer que, si des observateurs liés à un point quelconque O du disque tournant peuvent se considérer comme immobiles lorsqu'il s'agit d'expériences du premier ordre en fonction de la vitesse angulaire de rotation ω, et c'est le point de vue auquel il s'est placé dans ses Notes de 1921 et de 1937, ils doivent au contraire, en théorie classique comme en relativité, tenir compte de leur distance r à l'axe de rotation C lorsqu'il s'agit d'expériences du second ordre, ou lorsque, comme dans les expériences dont il s'agit ici, le dispositif expérimental n'est qu'en partie lié au disque tournant. Si l'on veut, en théorie relativiste, se placer au point de vue des observateurs O, il est nécessaire de considérer la partie du dispositif extérieure au disque, comme étant, au premier ordre, animée d'un mouvement de translation de vitesse ωr. Le raisonnement qui suppose cette partie immobile exige que les observateurs soient liés au centre C.

LES ÉCOULEMENTS GAZEUX CYLINDRIQUES

Par M. Jean VILLEY,

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Sommaire. — L'auteur a donné, dans une Note antérieure [1], les expressions générales des différentielles logarithmiques des caractéristiques thermodynamiques (p, v, T) et de la vitesse (u) d'un gaz parfait en écoulement linéaire, en fonction des variations de section ds, de l'apport de chaleur δq par unité de masse, et de l'énergie δw décoordonnée par unité de masse, dans le parcours élémentaire, dx.

Ces équations sont utilisées ici pour étudier le cas particulier des écoulements dans une canalisation cylindrique (ds = o).

Le cas particulier de l'adiabaticité (δq = o) donne lieu à des observations intéressantes relatives à la vitesse sonique limite.

Les échanges de chaleur δq sont ensuite envisagés, soit qu'ils soient réglés en fonction de δw pour obtenir une évolution thermodynamique déterminée, soit qu'ils se produisent spontanément en fonction de l'écart de température ($T - T_0$) entre le gaz et le milieu extérieur.

Dans tous les cas, les diverses variations logarithmiques s'expriment en fonction de $\frac{\delta w}{u^2}$, déterminée elle-même en fonction du déplacement dx par la loi de Blasius qui résume les résultats de l'étude expérimentale des écoulements cylindriques turbulents. On peut alors traiter les divers problèmes pratiques par des calculs menés de proche en proche pour de petits déplacements finis successifs dx.

1. Écoulements cylindriques adiabatiques.

— Les équations générales (5), (6), (7), (8) de l'écoulement linéaire d'un gaz parfait, données dans une Note antérieure [2], s'appliqueront au cas des écoulements cylindriques adiabatiques en y faisant ds = δq = o. On peut d'ailleurs les réduire à trois, car l'équation de continuité donne, pour une canalisation cylindrique $\rho . u$ = const, ou $\frac{u}{v}$ = const, d'où $\frac{du}{u} = \frac{dv}{v}$, et il est inutile de conserver l'équation (6) qui devient identique à l'équation (5) lorsque les termes en ds ont disparu.

[1] *J. de Physique*, 1942, **3**, p. 79.

[2] Précisons ici le calcul, effectué à partir des équations de base (1), (2), (3), (4) et dont on a seulement donné les résultats.

On a

$$U + pv = CT,$$

et l'on peut écrire (3) sous la forme

$$\frac{CT}{u^2}\frac{dT}{T} + \frac{du}{u} = \frac{\delta q}{u^2}.$$

Or

$$\mathfrak{U}^2 = \gamma RT,$$

d'où

$$CT = \frac{C}{\gamma R}\mathfrak{U}^2 = \frac{1}{\gamma - 1}\mathfrak{U}^2,$$

et (3) devient

$$\frac{1}{k}\frac{1}{\gamma - 1}\frac{dT}{T} = \frac{\delta q}{u^2} - \frac{du}{u}. \qquad (3')$$

De même, (4) peut s'écrire

$$\frac{du}{u} = -\frac{pv}{u^2}\frac{dp}{p} - \frac{\delta w}{u^2};$$

mais

$$\frac{pv}{u^2} = \frac{RT}{u^2} = \frac{1}{\gamma}\frac{\mathfrak{U}^2}{u^2} = \frac{1}{k\gamma},$$

et (4) devient

$$\frac{1}{k\gamma}\frac{dp}{p} = -\frac{\delta w}{u^2} - \frac{du}{u}. \qquad (4')$$

En portant dans (1) les résultats de (2), (3') et (4'), on obtient

$$-k\gamma\left(\frac{\delta w}{u^2} + \frac{du}{u}\right) + \frac{ds}{s} + \frac{du}{u} = k(\gamma - 1)\left(\frac{\delta q}{u^2} - \frac{du}{u}\right)$$

ou

$$\frac{du}{u}[-k\gamma + 1 + k(\gamma - 1)] = k(\gamma - 1)\frac{\delta q}{u^2} + k\gamma\frac{\delta w}{u^2} - \frac{ds}{s}$$

qui donne (5), et, de là (6), (7) et (8).

On obtient alors les trois équations

$$\frac{du}{u} = \frac{k\gamma}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}, \quad (11)$$

$$\frac{dT}{T} = -k^2\gamma\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}, \quad (12)$$

$$\frac{dp}{p} = -k\gamma\frac{1+k(\gamma-1)}{1+k}\frac{\delta w}{u^2}. \quad (13)$$

Comme δw est toujours positif, elles indiquent immédiatement le sens des variations des diverses grandeurs étudiées.

Elles distinguent deux domaines suivant le signe de $(1-k)$; et nous trouvons toujours, comme frontière, la vitesse sonique (3) $(k=1)$. Pour les vitesses subsoniques $(1-k>0)$, la vitesse u va en croissant (donc aussi le volume spécifique v; autrement dit, la densité $\rho = \frac{1}{v}$ va en décroissant), la pression p et la température T vont en décroissant. Pour les vitesses supersoniques $(1-k<0)$, on a les résultats opposés.

Dans les deux cas, on aboutit à la conclusion que la vitesse sonique constitue une limite infranchissable.

Il y a intérêt à vérifier cette conclusion par un calcul différent, basé sur l'équation de l'évolution thermodynamique.

2. **Évolution thermodynamique au cours de l'écoulement.** — Pour obtenir cette équation, il suffit d'éliminer la vitesse d'écoulement u entre deux des équations du mouvement. Cela est facile dans le cas de l'adiabaticité, où la conservation de l'énergie se traduit par l'équation de l'enthalpie $(\lambda = CT)$

$$u^2 - u_0^2 = 2C(T_0 - T). \quad (14)$$

Jointe à l'équation de continuité

$$u = \frac{D}{s}v = Mv, \quad (15)$$

elle donne, avec $pv = RT$, l'équation

$$M^2v^2 - u_0^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1}(p_0v_0 - pv) \quad (16)$$

d'une hyperbole qui représente l'évolution dans le diagramme de Clapeyron (coordonnées p, v).

Il est facile de la situer par rapport aux réseaux des isothermes et des isentropiques en comparant leurs pentes.

(3) Réservant les noms de vitesse pour les déplacements de matière et de célérité pour les propagations de perturbations, nous appelons vitesse sonique une vitesse d'écoulement égale à la célérité du son (pour la température réalisée à l'endroit considéré).

L'équation (16) donne

$$2M^2v\,dv = \frac{2\gamma}{\gamma-1}(-p\,dv - v\,dp),$$

ou

$$-\frac{\gamma}{\gamma-1}v\,dp = \left(M^2v + \frac{\gamma}{\gamma-1}p\right)dv,$$

ou

$$\frac{dp}{dv} = -\left(\frac{p}{v} + M^2\frac{\gamma-1}{\gamma}\right). \quad (17)$$

Cette pente est négative, ce qui signifie que les sens de variation de la pression p et du volume spécifique v sont toujours opposés (autrement dit ceux de p et de la densité $\rho = \frac{1}{v}$ sont toujours les mêmes). Elle est plus grande en valeur absolue que la pente $-\frac{p}{v}$ de l'isotherme, ce qui signifie que les sens de variation de p et de la température T sont toujours les mêmes. Enfin, l'équation (14) indique que les sens de variation de T et de la vitesse u sont toujours opposés.

Pour déterminer dans quel sens se produit l'évolution définie par l'équation (16), on a la condition $dS>0$, imposée aux évolutions adiabatiques irréversibles (frottements). Elle signifie que le point représentatif doit toujours avancer, dans le réseau des isentropiques, dans le sens de l'entropie croissante.

Or, la courbe (16) devient tangente à l'isentropique en un point A défini par la condition

$$\frac{p}{v} + M^2\frac{\gamma-1}{\gamma} = \gamma\frac{p}{v},$$

ou

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{v}(\gamma-1)$$

ou

$$u^2 = \gamma pv = \gamma RT:$$

la vitesse correspondant à l'état A est donc sonique.

Cette isentropique définit l'entropie maximum S_A réalisable dans l'évolution.

L'hyperbole (16) représente par conséquent deux évolutions absolument indépendantes, l'une subsonique, l'autre supersonique, correspondant aux deux arcs séparés par le point A. Elles tendent l'une et l'autre vers le point A. Nous retrouvons bien la même conclusion qu'à partir des équations (11), (12), (13) où δw n'est pas autre chose que $T\,dS$ (puisque la décoordination δw produit exactement la même modification qu'un apport égal de chaleur).

3. **La limite sonique de la vitesse.** — Lorsque l'on envisage, en pratique, le cas des écoulements subsoniques provoqués par un gradient négatif de pression, cette conclusion, relative aux canalisations cylindriques adiabatiques, n'est pas plus étonnante

que celle relative aux convergents isentropiques, à laquelle nous a habitués l'expérience journalière, et qui s'énonce comme elle : la vitesse d'écoulement va en croissant, sans pouvoir dépasser la vitesse sonique.

Le cas des écoulements supersoniques, auxquels les équations s'appliquent aussi bien, a par contre un aspect plus paradoxal. Puisque le gradient de pression est positif, l'écoulement du gaz est commandé par l'énergie cinétique qu'il avait préalablement acquise. Il est impossible d'admettre que, dans une canalisation que nous allongerons progressivement, la vitesse puisse rester indéfiniment supersonique, puisque, d'après les équations (11) et (12), où $(1 - k) < 0$, la vitesse décroît constamment et la température T croît constamment, et de plus en plus vite quand k tend vers 1.

On pourrait chercher à échapper à la difficulté en incriminant la validité des équations. Elles sont basées, dans l'un et l'autre mode de calcul, sur l'hypothèse que l'on a une approximation légitime en considérant la vitesse comme uniforme dans chaque section s. Bien que les équations (11), (12), (13), écrites pour un écoulement entre parois immobiles, ne s'appliquent pas à une nappe cylindrique élémentaire ([4]), elles donnent à penser, à titre d'approximation, que, au voisinage de $k = 1$, les différences de vitesse entre les divers filets doivent s'exagérer beaucoup. Il faudrait donc étudier séparément les mouvements des diverses nappes cylindriques; cela se compliquerait encore du fait que l'adiabaticité globale réalisée par des parois isolantes n'empêche nullement des échanges de chaleur entre les diverses nappes, si des différences importantes s'établissent entre leurs températures du fait de leurs mouvements différents.

Mais cela ne met en doute l'utilisation des équations qu'au voisinage immédiat de la vitesse sonique, et si k s'écarte de façon sensible de la valeur 1, les signes de du et dT donnés par (11) et (12) lui imposent de tendre vers cette valeur.

Il reste, pour échapper à la contradiction, l'hypothèse d'un passage discontinu d'une vitesse supersonique à une vitesse subsonique (sans traverser la vitesse sonique) par une onde de choc analogue à celle qui se produit dans le divergent d'une tuyère de Laval lorsque la pression d'aval devient trop forte.

On peut analyser la naissance d'une telle onde de choc en imaginant l'expérience suivante.

Utilisons une tuyère de Laval que nous prolongeons, après un raccord continu convenable, par une canalisation cylindrique constituée de sections identiques entre elles susceptibles d'être ajoutées indéfiniment les unes au bout des autres.

Le jet supersonique $(k > 1)$ fourni par la tuyère de Laval avance, grâce à son inertie, dans les premières sections, à la sortie desquelles on obtient des pressions progressivement croissantes

$$p_m = p_{m-1} + \int dp = p_{m-1} + \int pk\gamma \frac{1 + k(\gamma - 1)}{k - 1} \frac{\delta w}{u^2}$$

et des vitesses progressivement décroissantes

$$u_m = u_{m-1} + \int du = u_{m-1} - \int u \frac{k\gamma}{k - 1} \frac{\delta w}{u^2}.$$

Après chaque adjonction d'une nouvelle section m, maintenons la pression d'aval à la valeur p_m qui a été ainsi atteinte.

Il arrivera forcément que, après la pose d'une $n^{\text{ème}}$ section, l'énergie cinétique restante $\frac{1}{2}u_n^2$ ne sera plus suffisante pour assurer la continuation de l'écoulement dans la $(n + 1)^{\text{ème}}$ section par le même mécanisme d'inertie. Lorsque nous mettrons en place cette $(n + 1)^{\text{ème}}$ section, l'évacuation ne pourra plus être assurée qu'avec l'aide d'un gradient négatif de pression : il faut que la pression augmente en un point convenablement situé dans cette $(n + 1)^{\text{ème}}$ section ou en amont d'elle, et cela ne peut être réalisé que par l'apparition d'une onde de choc.

Maintenons dorénavant la pression d'aval à la valeur invariable p_n, en ajoutant de nouvelles sections, numérotées $(n + 1)$, $(n + 2)$, ..., $(n + i)$. Le débit de la tuyère restant constant, la force de frottement dans cette canalisation supplémentaire augmente progressivement avec sa longueur i; l'écoulement ne peut être maintenu que grâce à une augmentation parallèle de la pression $[p_n + f(i)]$ à l'entrée de la $(n + 1)^{\text{ème}}$ section, au-dessus de la pression constante d'aval p_n. Cette augmentation de pression $f(i)$ ne peut être réalisée que par un déplacement de l'onde de choc vers l'amont, d'abord jusqu'à l'entrée de la canalisation, puis dans le divergent de la tuyère de Laval. Lorsqu'elle aura atteint le col de la tuyère (où elle s'évanouit), le débit cessera d'être constant; l'adjonction des sections suivantes le fera progressivement diminuer.

Mais il ne semble pas douteux que nous aurions pu, en ajoutant la $(n + 1)^{\text{ème}}$ section, y assurer l'évacuation, sans faire naître l'onde de choc ni rien modifier dans les premières sections, en abaissant la pression d'aval au-dessous de p_n ([5]) à une valeur convenable p_{n+1}. Des opérations analogues peuvent être répétées sur un nombre j de sections supplémentaires d'autant plus élevé que la pression p_n est plus élevée et laisse une marge plus grande pour réaliser des gradients de pression négatifs jusqu'à la valeur la plus basse p_{n+j} que nous puissions maintenir. Nous aurons alors obtenu, dans ces

([4]) Il faudrait, dans l'équation de conservation de l'énergie, introduire le travail des forces de frottement des filets voisins.

([5]) A condition que p_n soit assez grand; mais nous pouvons l'augmenter en augmentant la pression en amont de la tuyère.

j sections, un écoulement incompatible avec les équations (11), (12), (13), aussi bien d'ailleurs qu'avec les équations (14), (15), (16).

Il y a là un paradoxe si nous admettons que ces équations sont valables jusqu'à la vitesse sonique. En réalité, cette contradiction confirme simplement les doutes que nous avons été amenés à émettre plus haut sur la validité, au voisinage de la vitesse sonique, de l'approximation qui traite l'écoulement comme s'il était uniforme dans chaque section.

4. Interventions thermiques diverses. — Lorsque l'écoulement n'est pas adiabatique, le facteur d'action δq intervient, en même temps que le facteur δw, dans les variations alors définies par les équations

$$\frac{du}{u} = k\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta q}{u^2} + k\frac{\gamma}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}, \tag{18}$$

$$\frac{dT}{T} = k\frac{\gamma-1}{1-k}(1-k\gamma)\frac{\delta q}{u^2} - k^2\gamma\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}, \tag{19}$$

$$\frac{dp}{p} = -k^2\gamma\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta q}{u^2} - k\gamma\frac{1+k(\gamma-1)}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}. \tag{20}$$

Ces équations n'indiquent le sens des variations que si l'on connaît la relation entre δq et δw.

On doit noter qu'il est difficile de réaliser, avec un courant gazeux rapide, des échanges de chaleur δq importants, malgré la turbulence qui élimine l'obstacle dû à la faible conductibilité thermique des gaz. La résistance thermique au contact d'un gaz sec et d'une paroi — fût-elle d'un métal très conducteur — est en effet très élevée. Il est, par contre, assez facile de créer dans le gaz même, par des réactions chimiques [6], des quantités d'énergie thermique importantes, ce qui est équivalent, au point de vue thermodynamique, à un apport de chaleur de même valeur $\delta q > 0$.

Réaliser les échanges δq qui fourniront telle ou telle évolution thermodynamique — ce qui exige que le rapport $\frac{\delta q}{\delta w}$ soit convenablement réglé en fonction de l'état et de la vitesse du gaz — apparaît donc comme fort difficile. Mais si l'on suppose qu'on sache le faire, en remplaçant δq en fonction de δw conformément à cette relation connue, on ramène les équations (18), (19), (20) à une forme simple analogue à celle des équations (11), (12), (13).

Le cas le plus intéressant en pratique est celui de l'isothermie, car il constitue le cas limite pour l'étude des canalisations très peu isolées thermiquement, de même que l'adiabaticité est le cas limite pour l'étude des canalisations à isolement thermique très élevé.

On aura, en annulant (19), la condition

$$(1-k\gamma)\,\delta q - k\gamma\,\delta w = 0,$$

ou

$$\delta q = \frac{k\gamma}{1-k\gamma}\,\delta w. \tag{21}$$

On pourrait envisager aussi l'hypothèse de l'isentropie réalisée par compensation, en faisant

$$\delta q = -\delta w. \tag{22}$$

L'écoulement isobare serait obtenu en annulant (20), ce qui donne

$$k(\gamma-1)\,\delta q + [1+k(\gamma-1)]\,\delta w = 0,$$

ou

$$\delta q = -\frac{1+k(\gamma-1)}{k(\gamma-1)}\,\delta w. \tag{23}$$

Enfin, l'écoulement à vitesse constante, qui serait aussi à densité constante (et volume spécifique constant) est défini en annulant (18), soit

$$(\gamma-1)\,\delta q + \gamma\,\delta w = 0,$$

ou

$$\delta q = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\,\delta w. \tag{24}$$

En portant ces diverses expressions de δq dans les équations (18), (19), (20), on obtient le tableau (25), dans lequel nous ferons figurer également les résultats relatifs à l'écoulement adiabatique ($\delta q = 0$), antérieurement étudié.

Nature de l'écoulement.	$\frac{du}{u}$	$\frac{dT}{T}$	$\frac{dp}{p}$	
Adiabatique	$k\frac{\gamma}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$	$-k^2\gamma\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$	$-k\gamma\frac{1+k(\gamma-1)}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$	
Isotherme	$\frac{k\gamma}{1-k\gamma}\frac{\delta w}{u^2}$	0	$-\frac{k\gamma}{1-k\gamma}\frac{\delta w}{u^2}$	
Isentropique	$\frac{k}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$	$-k\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$	$-k\frac{\gamma}{1-k}\frac{\delta w}{u^2}$	(25)
Isobare	$-\frac{\delta w}{u^2}$	$-\frac{\delta w}{u^2}$	0	
Vitesse constante	0	$-k\gamma\frac{\delta w}{u^2}$	$-k\gamma\frac{\delta w}{u^2}$	

[6] Pratiquement par des combustions.

Avec ce tableau, on peut, pour les quatre derniers cas, écrire des équations analogues aux équations (11), (12), (13) du cas adiabatique.

5. L'anomalie thermique. — L'équation (19) met en évidence une particularité intéressante (7) : c'est l'inversion de l'effet thermique d'un apport de chaleur lorsque la vitesse d'écoulement est comprise entre $\frac{\mathcal{U}}{\sqrt{\gamma}}$ et $\mathcal{U}$. On voit en effet que pour $\frac{1}{\gamma} < k < 1$, un apport de chaleur ($\delta q < 0$) donne une contribution négative à la variation de température.

Autrement dit, aux vitesses de ce domaine, il faut enlever de la chaleur pour obtenir une température croissante (c'est-à-dire aussi une énergie interne croissante).

Il n'y a pas là, en réalité, un résultat paradoxal. Il ne faut pas perdre de vue, en effet, que les échanges de chaleur δq — comme d'ailleurs aussi les décoordinations δw — interviennent dans l'écoulement, non seulement par leur action directe sur l'énergie interne, mais indirectement par les modifications de volume qu'ils contribuent à imposer. Nous sommes habitués, dans l'étude des évolutions statiques, à ne pas nous étonner des chaleurs spécifiques négatives réalisées lorsque le fluide fournit un travail de dilatation $p\,dv$ plus grand que la chaleur δq qu'il reçoit. Il en est de même ici lorsque l'apport $\delta q > 0$ s'accompagne d'un travail $p\,dv$ plus grand que lui. Si nous considérons le cas limite où les termes en δw seraient négligeables devant les termes en δq, la condition pour qu'il en soit ainsi s'écrira, d'après (18) (8),

$$pvk\frac{\gamma-1}{1-k}\frac{\delta q}{u^2} > \delta q$$

ou, puisque nous supposons $\delta q > 0$,

$$\frac{pv}{u^2}k\frac{\gamma-1}{1-k} > 1;$$

mais $pv = \frac{1}{\gamma}\mathcal{U}^2$; d'où la condition

$$\frac{1}{\gamma k}k\frac{\gamma-1}{1-k} > 1$$

qui exige d'abord $1-k > 0$, ou $k < 1$, et qui permet alors d'écrire

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} > 1-k.$$

ou

$$\gamma - 1 > \gamma - k\gamma.$$

(7) Elle a été signalée par M. JOUGUET, *C. R. Acad. Sc.*, **194**, 1932, p. 213.

(8) Puisque $\frac{dv}{v} = \frac{du}{u}$.

ou

$$k\gamma > 1 \quad \text{ou} \quad k > \frac{1}{\gamma}.$$

Nous retrouvons bien les deux limites du domaine de l'anomalie thermique.

L'influence de la décoordination δw (qui est toujours positive) sur la température présente elle aussi le même aspect paradoxal à première vue, puisque, dans une canalisation cylindrique adiabatique ($ds = \delta q = 0$), l'équation (12) nous donne une température décroissante tant que k est plus petit que 1 (vitesses subsoniques).

L'équation de définition de l'énergie interne devient, lorsqu'il y a décoordination,

$$dU = \delta q + \delta w - p\,dv,$$

et s'il y a adiabaticité

$$dU = \delta w - p\,dv.$$

La condition pour que la température $T = \frac{U}{c}$ soit décroissante, c'est que l'action indirecte de δw pour accroître le travail $p\,dv$ l'emporte sur l'apport direct d'énergie thermique qu'il constitue. Elle s'écrit donc $p\,dv > \delta w$, ou, d'après (11),

$$pv\frac{k\gamma}{1-k}\frac{\delta w}{u^2} > \delta w,$$

ou, puisque $\delta w > 0$,

$$\frac{pv}{u^2}\frac{k\gamma}{1-k} > 1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{k\gamma}\frac{k\gamma}{1-k} > 1.$$

ce qui exige simplement

$$1-k > 0 \quad \text{ou} \quad k < 1.$$

6. Variations de l'énergie cinétique. — Si, après les variations de l'énergie interne, nous examinons celles de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}u^2$, nous aurons à faire des observations analogues.

La décoordination δw est une destruction d'énergie cinétique; elle agit donc directement pour diminuer celle-ci. Mais cette action directe peut être effacée par une action indirecte qui sera une augmentation du terme $(-v\,dp)$, puisque

$$d\left(\frac{1}{2}u^2\right) = -v\,dp - \delta w.$$

L'équation (11) nous en donne un exemple frappant. Le signe de $d\left(\frac{1}{2}u^2\right) = u\,du$, est en effet celui de du, ou de $\frac{du}{u}$. Nous constatons que, dans un écoulement cylindrique adiabatique ($ds = \delta q = 0$), à la décoordination δw (toujours positive) est liée

une augmentation de l'énergie cinétique tant que $(1 - k)$ reste positif, c'est-à-dire aux vitesses subsoniques. C'est parce qu'elle exige un gradient de pression négatif de valeur telle que la résultante des pressions (d'amont et d'aval) l'emporte sur la résultante des résistances de frottement de la paroi, et donne une augmentation de quantité de mouvement.

La condition $(-v\,dp) > \delta w$ nous donne d'ailleurs d'après l'équation (13),

$$\frac{vp}{u^2} k\gamma \frac{1 + k(\gamma - 1)}{1 - k} \delta w > \delta w,$$

ou

$$\frac{1}{k\gamma} k\gamma \frac{1 + k(\gamma - 1)}{1 - k} > 1,$$

qui exige seulement $1 - k > 0$.

Les échanges de chaleur δq, eux, n'interviennent qu'indirectement dans la valeur de l'énergie cinétique, par leur action sur $(-v\,dp)$. On constate par exemple sur l'équation (18) que, dans une canalisation cylindrique où la décoordination serait négligeable auprès des échanges de chaleur $(ds = \delta w = 0)$, un apport de chaleur $(\delta q > 0)$ s'accompagne, aux vitesses subsoniques $(1 - k > 0)$, d'une augmentation de l'énergie cinétique. Cela correspond simplement à la condition $(-v\,dp) > 0$, qui donne, d'après (20),

$$\frac{pv}{u^2} k^2\gamma \frac{\gamma - 1}{1 - k} \delta q > 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{k\gamma} k^2\gamma \frac{\gamma - 1}{1 - k} > 0;$$

elle est satisfaite pour $1 - k > 0$.

7. Écoulement isotherme. — Dans le cas de l'écoulement isotherme, le tableau (25) indique comme limite infranchissable $k = \frac{1}{\gamma}$, c'est-à-dire

$$u = \sqrt{RT}.$$

En réalité, tandis que la limite $u = \sqrt{\gamma RT}$ était en fait infranchissable dans une canalisation parfaitement isolante, il s'agit ici d'une vitesse que l'on ne peut pas traverser *isothermiquement*, mais que l'on pourra traverser en fait, même dans une canalisation dont on supposerait les parois parfaitement conductrices. L'équation (19) montre en effet que, lorsque k devient égal à $\frac{1}{\gamma}$, l'isothermie exigerait des échanges de chaleur δq infiniment grands, pour que le terme en δq puisse continuer à compenser le terme en δw.

La très grande résistance thermique localisée au contact entre un gaz sec et une paroi métallique s'oppose à des échanges δq très élevés. On pourra alors traverser la valeur $k = \frac{1}{\gamma}$ en s'écartant localement de l'isothermie. Les expressions du tableau (25) indiquent que si, après ce franchissement, l'isothermie est à nouveau assurée, la pression sera croissante, après avoir été décroissante avant la limite.

Dans la pratique, on a en général à étudier des écoulements pour lesquels k reste loin au-dessous de $\frac{1}{\gamma}$, et dans lesquels l'isothermie est possible. L'évolution est alors représentée, dans le diagramme entropique, par l'horizontale $T = T_0$, et dans le diagramme de Clapeyron par l'hyperbole $pv = p_0v_0$, sur lesquelles il est facile de suivre les déplacements du point qui représente les états successifs du gaz le long de l'écoulement.

8. Échanges thermiques spontanés. — En général, plutôt que des interventions thermiques réglées en vue de réaliser une relation déterminée entre δq et δw, on aura des échanges spontanés de chaleur réglés par l'écart entre la température T du gaz et la température extérieure T_0.

A titre de première approximation (d'autant meilleure que l'écart des températures est plus faible), le flux de chaleur à travers l'unité de surface de la paroi pendant l'unité de temps sera de la forme [9]

$$j(T_0 - T).$$

On pourra alors écrire

$$\rho\pi \frac{d^2}{4} l\,\delta q = \pi d l j(T_0 - T) \frac{dx}{u},$$

d'où

$$\delta q = \frac{4j(T_0 - T)}{u\rho d} dx. \qquad (26)$$

Lorsque l'on veut faire circuler un fluide qu'il n'y a pas intérêt à maintenir à une température différente de la température extérieure, on ne se préoccupe pas en général d'isoler thermiquement la canalisation. Le coefficient de conductibilité j sera alors très grand, et les échanges δq modérés que réclame l'isothermie approximative pourront être effectivement obtenus sous des différences de température $(T_0 - T)$ très petites.

Au contraire, si la canalisation comporte un isolement thermique très efficace, j devient très petit. Si $(T_0 - T)$ reste modéré, δq restera très petit et l'écoulement sera voisin de l'écoulement adiabatique.

Si $T_0 - T$ est très grand, quelque soin que l'on ait pris à calorifuger le tube, les échanges δq deviendront notables. On devra dans les équations (18), (19), (20) remplacer δq par son expression (26).

[9] Les choses peuvent se compliquer de flux thermiques longitudinaux dans l'épaisseur de la paroi, calorifugée extérieurement.

9. **Détermination de δw en fonction de dx.** — Il nous reste alors, dans les équations (18), (19), (20) et dans leurs divers cas particuliers, le paramètre de variation $\frac{\delta w}{u^2}$. Pour les utiliser, il faut savoir expliciter ce paramètre en fonction du déplacement dx compté le long de l'axe du tuyau.

En chaque endroit, les calculs menés de proche en proche nous font connaître la vitesse d'écoulement u (confondue avec la vitesse moyenne dans la section), la densité $\rho = \frac{1}{v}$ $\left(\text{par } \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{du}{u}\right)$ du gaz, et sa température T, qui définit sa viscosité μ. On peut alors évaluer $\delta w = w.dx$ d'après les résultats des études expérimentales du débit dans des écoulements cylindriques courts (où la vitesse moyenne du gaz et son état thermodynamique peuvent être considérés comme invariables en fonction de x).

Dans le cas des écoulements turbulents ($\mathcal{R} > 2000$) qui est celui des écoulements rapides industriellement intéressants, les résultats expérimentaux sont représentés avec une très bonne précision par la loi invariante de Blasius

$$\lambda = 0{,}3164\,\mathcal{R}^{-0,25}, \tag{27}$$

où les deux grandeurs sans dimensions λ et $\mathcal{R}$ sont définies par

$$-\frac{dp}{dx} = \lambda\,\frac{\rho u^2}{2d} \tag{28}$$

et

$$\mathcal{R} = \frac{\rho u d}{\mu}. \tag{29}$$

De ces trois équations, on tire

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\rho u^2}{2d}\,0{,}3164\,\frac{\mu^{0,25}}{\rho^{0,25}u^{0,25}d^{0,25}}$$

ou

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{0{,}1582}{d^{1,25}}\,\rho^{0,75}u^{1,75}\mu^{0,25}. \tag{30}$$

Or, nous pouvons relier $\frac{dp}{dx}$ à la force de frottement f_x par unité de surface de la paroi, et, de là, à l'énergie dissipée δw.

En effet, dans les écoulements sans accélération appréciable réalisés pour l'étude expérimentale des débits, il y a équilibre entre les pressions et les forces de frottement; d'où, pour la masse gazeuse comprise entre deux sections s_1 et s_2, l'équation

$$-\frac{dp}{dx}(x_2 - x_1)s = -2\pi r(x_2 - x_1)f_x = -F_x.$$

Mais, si nous étudions le mouvement relatif par rapport à des axes entraînés avec le fluide, nous écrirons que le travail de la force de frottement dans le déplacement ($-dx$) des parois fournit l'énergie dissipée (δw par unité de masse). Cela donne

$$F_x(-dx) = s(x_2 - x_1)\rho\,\delta w$$

ou

$$-\frac{dp}{dx}(x_2 - x_1)s\,dx = s(x_2 - x_1)\rho\,\delta w,$$

d'où, en utilisant (30),

$$\delta w = -\frac{dp}{dx}\frac{dx}{\rho} = \frac{0{,}1582}{d^{1,25}}\,\rho^{-0,25}u^{1,75}\mu^{0,25}\,dx,$$

et

$$\frac{\delta w}{u^2} = \frac{0{,}1582}{d^{1,25}}\,\frac{\nu^{0,25}}{u^{0,25}}\,dx, \tag{31}$$

en introduisant la viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

10. **Exécution des calculs.** — Cette équation (31), jointe à l'équation (26) que nous écrirons sous la forme

$$\frac{\delta q}{u^2} = \frac{4j(T_0 - T)}{u^3\rho d}\,dx, \tag{32}$$

nous permet d'expliciter les équations (18), (19), (20) en fonction du déplacement dx le long de la canalisation.

Elles permettent alors de calculer tout l'écoulement de proche en proche si l'on connaît un point de départ (p_0, T_0, u_0).

On traitera ainsi le problème le plus simple où, ayant défini l'état d'amont (p_0, T_0), on cherche à déterminer quelle pression p_l subsistera à la sortie aval pour un débit D donné; la vitesse initiale u_0 est alors déterminée par $D = s\rho_0 u_0$ ou $u_0 = \frac{DRT_0}{sp_0}$. Les calculs se présentent de la même manière si l'on cherche l'état qu'il faut entretenir en amont pour obtenir en aval un état $p_l T_l$ donné avec un débit D donné; ils sont conduits alors par déplacements dx négatifs à partir de la sortie l.

Si les données ne définissent pas complètement un point de départ, le problème devient plus compliqué. Supposons par exemple que, connaissant l'état d'amont $p_0 T_0$ et la pression p_l qui règne en aval, on cherche à calculer le débit D obtenu. On ne connaît pas u_0, dont on a besoin au départ pour appliquer les formules. On devra alors calculer en attribuant à u_0 diverses valeurs hypothétiques. On pourra ensuite déterminer par interpolation celle qui donne la pression p_l imposée. On aura alors

$$D = s\rho_0 u_0 = su_0\,\frac{p_0}{RT_0}.$$

Le problème est encore plus complexe, du moins en apparence si, la pression p_0 étant donnée, nous cherchons quelle température initiale T_0 est nécessaire pour obtenir à la sortie une température T_l donnée, avec un débit D imposé (sous réserve que

cette valeur soit possible, ce qui correspond à la condition nécessaire $p_l > 0$). Nous devons, en effet, donner des valeurs hypothétiques à deux inconnues T_0 et u_0. Mais elles sont liées l'une à l'autre par la relation

$$u_0 = \frac{RD}{sp_0} T_0;$$

nous sommes donc, en réalité, ramenés à un problème analogue au précédent, qui consiste à chercher par interpolation quelle est la valeur de T_0 qui conduit à la température T_l désirée.

10. **Cas de la vapeur d'eau**. — Le cas de la vapeur d'eau est beaucoup plus important industriellement que celui des gaz parfaits.

Malheureusement, au voisinage de la courbe de saturation où l'on se trouvera, en général, l'équation d'état des gaz parfaits ne constitue qu'une assez médiocre approximation pour la vapeur d'eau surchauffée. C'est dire que les équations (18), (19), (20) qu'elle contribue à former définissent imparfaitement l'écoulement.

Si l'on vient à pénétrer dans le domaine de saturation, elle n'a plus rien à voir avec la question. Il faudrait la remplacer par la relation

$$\mathrm{d}p = f'(T)\,\mathrm{d}T; \tag{33}$$

la fonction $f'(T)$ n'a pas d'expression algébrique simple, mais ses valeurs sont données par les tables d'usage courant.

Toutefois, cette relation suppose l'équilibre thermique réalisé entre la phase liquide et la phase gazeuse, ce qui pourra être assez éloigné de la réalité dans un écoulement rapide. Une autre difficulté encore plus sérieuse est liée au fait que l'on ne sait pas quelle fraction de la phase liquide ruisselle sur les parois et se trouve de ce fait hors de compte pour l'évaluation de la densité ρ et de l'énergie cinétique de la phase gazeuse (où seules interviennent les gouttelettes très fines, qui sont entraînées avec elle).

Si, malgré ces difficultés, et en faisant l'approximation de les négliger, nous voulons traiter le problème de la façon dont nous l'avons traité pour les gaz parfaits, la relation (33) nous permet d'éliminer immédiatement l'inconnue dp. Il reste alors, en négligeant le ruissellement, les équations

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathrm{d}v}{v}, \tag{34}$$

$$\mathrm{d}(U + pv) + u\,\mathrm{d}u = \delta q, \tag{35}$$

$$v\,\mathrm{d}p + u\,\mathrm{d}u = -\delta w. \tag{36}$$

Dans le domaine de saturation, il est commode d'utiliser les deux variables T et θ (titre en vapeur). Les tables usuelles donnent les valeurs de la tension maxima $f(T)$, du volume spécifique $\mathcal{V}(T)$ de la vapeur saturante, de la chaleur de vaporisation $r(T)$ (10) et permettent d'évaluer leurs dérivées. Soit m la chaleur spécifique (10) de l'eau.

On a alors

$$v = \theta \mathcal{V},$$

d'où

$$\mathrm{d}v = \mathcal{V}\,\mathrm{d}\theta + \theta \mathcal{V}'(T)\,\mathrm{d}T$$

et

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\mathcal{V}}{v}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\mathcal{V}'\theta}{v}\,\mathrm{d}T.$$

D'autre part

$$U + pv = m(T - 273) + \theta r(T)$$

et

$$\mathrm{d}(U + pv) = m\,\mathrm{d}T + \theta r'\,\mathrm{d}T + r\,\mathrm{d}\theta.$$

Les équations deviennent donc

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathcal{V}}{v}\,\mathrm{d}\theta + \frac{\mathcal{V}'\theta}{v}\,\mathrm{d}T, \tag{37}$$

$$r\,\mathrm{d}\theta + (m + \theta r')\,\mathrm{d}T + u\,\mathrm{d}u = \delta q, \tag{38}$$

$$v f'\,\mathrm{d}T + u\,\mathrm{d}u = -\delta w, \tag{39}$$

d'où

$$\mathrm{d}T = -\frac{\delta w + u\,\mathrm{d}u}{v f'} \tag{39'}$$

et

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\delta q}{r} + \frac{m + \theta r'}{r v f'}\,\delta w + \frac{u\,\mathrm{d}u}{r}\left(\frac{m + \theta r'}{v f'} - 1\right). \tag{38'}$$

Ces deux derniers résultats portés dans (37) donnent, en posant

$$A = \frac{\mathcal{V}}{v r}, \qquad B = \mathcal{V}\,\frac{m + \theta r'}{v^2 r f'} - \frac{\mathcal{V}'\theta}{v^2 f'}$$

et

$$C = \frac{1}{u} + \mathcal{V}'\,\frac{u\theta}{v^2 f'} + \frac{\mathcal{V} u}{v r}\left(1 - \frac{m + \theta r'}{v f'}\right),$$

$$\mathrm{d}u = \frac{A\,\delta q + B\,\delta w}{C}, \tag{37'}$$

qui, reporté dans (38′) et (39′), donne dθ et dT.

Ces calculs seraient assez laborieux pour un résultat bien aléatoire, car il est difficile de savoir dans quelle mesure le ruissellement altère ces prévisions.

Nous noterons d'autre part que, du fait de la condensation au contact de la paroi, le coefficient d'échange thermique entre la vapeur et la paroi est beaucoup plus grand que dans le cas d'un gaz sec (donc de la vapeur surchauffée).

12. **Écoulement adiabatique de la vapeur d'eau**. — Dans le cas de l'écoulement adiabatique, quel que soit le fluide gazeux, on peut définir immé-

(10) Qu'il faut exprimer ici en unités mécaniques.

diatement l'évolution thermodynamique au cours de l'écoulement en éliminant la vitesse u entre l'équation de continuité $\rho u = \rho_0 u_0$ et l'équation de conservation de l'énergie, qui s'écrit alors

$$u^2 - u_0^2 = 2(\lambda_0 - \lambda),$$

en désignant par λ l'enthalpie $U + pv$.

On obtient ainsi l'équation

$$u_0^2 \left[\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 - 1 \right] = 2(\lambda_0 - \lambda). \qquad (40)$$

Elle définit une courbe que l'on peut représenter sur l'un quelconque des diagrammes thermodynamiques, et en particulier sur le diagramme entropique (T, S).

Pour la vapeur d'eau, la construction de cette courbe est très facile en utilisant les graphiques d'usage courant qui représentent, sur le diagramme de Mollier (coordonnées λ et S), les réseaux chiffrés d'isothermes, d'isobares et d'isochores.

Pour chaque valeur de ρ, l'équation (40) donne l'horizontale λ sur laquelle est situé le point correspondant de l'évolution. Son abscisse donne S, et on lit T par interpolation dans le réseau des isothermes. La vitesse d'écoulement u qui correspond à chaque état est immédiatement donnée par $u = \frac{\rho_0}{\rho} u_0$.

Cette courbe (T, S) permet de déterminer de proche en proche les parcours dx correspondant à chaque transformation élémentaire $M_1 M_2$, car la surface $T\,dS$ est égale, dans le cas de l'adiabaticité, à l'énergie décoordonnée δw. Or, celle-ci est liée à dx par l'équation (31).

Manuscrit reçu le 12 juin 1942.

PROCÉDÉS CHIMIQUES D'EXTRACTION ET DOSAGE DU RADIOACTINIUM

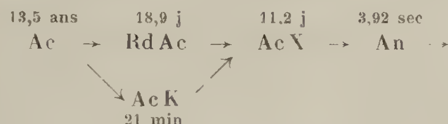
Par Maurice BACHELET,
Chef de travaux pratiques à l'Institut du Radium.

Sommaire. — On entraîne le radioactinium contenu dans une solution de lanthane actinifère en effectuant une précipitation partielle d'hydroxyde de lanthane.

Si le produit contient des sels ferriques, il y aura aussi précipitation d'hydroxyde ferrique. Pour séparer les sels de fer et de lanthane du radioactinium on traite par un mélange de carbonates et de sulfures alcalins et le radioactinium passe seul en solution.

On peut alors le doser par son rayonnement γ mou. Si le produit contient de l'actinium X la mesure du rayonnement β ou du rayonnement γ dur permettra de faire la correction du rayonnement γ mou de l'actinium X.

1. Procédés chimiques d'extraction. — Le radio-actinium isotope du thorium se forme à partir de l'actinium suivant la filiation suivante :



La matière première pour la préparation du RdAc est donc l'Ac, qui se trouve toujours associé avec les terres rares. Lorsque le produit d'Ac est concentré dans quelques grammes de sels de terres rares, on peut ajouter un peu de Th et utiliser une réaction permettant de séparer le Th des terres rares, par exemple : précipitation par l'eau oxygénée, par le thiosulfate de sodium, par l'iodate de potassium, etc.

J'ai fait une concentration d'Ac dans un produit de 40 kg de terres rares actinifères et il était utile d'extraire de temps à autres le RdAc, qui, pour être employé dans des expériences de physique, devait être concentré dans quelques milligrammes de matière.

Les méthodes indiquées ci-dessus ne peuvent convenir, car il faudrait ajouter une quantité importante de Th de laquelle il est impossible d'extraire le RdAc.

Il est nécessaire d'entraîner le RdAc par un élément dans lequel il sera facile de l'extraire.

J'ai fait, dans ce but, de nombreux essais basés sur le fait que l'hydroxyde de Th précipite au pH 3,5 alors que les hydroxydes de terres rares précipitent à des pH beaucoup plus élevés (pour l'hydroxyde de La le pH est de 8,4).

Le dosage du radioactinium présente quelques difficultés, aussi j'ai préféré faire des essais en remplaçant le RdAc par l'UX, autre isotope du Th, sur une solution de nitrate de La + UX obtenue en entraînant l'UX par un précipité de fluorure de La et en transformant le fluorure de La en nitrate de La.[1]

Lorsqu'un essai fait avec de l'UX m'a donné un résultat intéressant, j'ai fait un essai similaire avec un produit de RdAc et la comparaison des résultats a toujours été satisfaisante.

Si l'on examine le tableau de pH de précipitation des hydroxydes métalliques, tel qu'il a été donné par Britton dans son livre « *Hydrogen Ions* », on constate que de nombreux hydroxydes précipitent entre le Th et le La. En principe, tous ces hydroxydes doivent pouvoir entraîner le RdAc. J'ai vérifié cette hypothèse pour les hydroxydes de Cu, de Zn, de Cd et de Ni. En ajoutant progressivement de la soude diluée à une solution de nitrate de La contenant de l'UX et un de ces entraîneurs, j'ai extrait 95 à 98 pour 100 de l'UX en précipitant partiellement un des hydroxydes indiqués ci-dessus.

Dans tous les cas, lorsqu'on emploie une faible proportion d'entraîneur, il est impossible d'éviter la précipitation de lanthane.

Devant ces résultats, j'ai préféré utiliser comme entraîneur le lanthane, qui donne pour une précipitation de 4 pour 100 de La (OH) un entraînement de 97 pour 100 de RdAc. Sur la solution par NO H du précipité d'hydroxyde de La ainsi enrichi en RdAc, on peut opérer par la même méthode un

nouveau fractionnement, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait obtenu un produit à la concentration désirée.

Si le produit initial contient des sels ferriques, on constate que l'hydroxyde ferrique précipite en premier. Il n'y a entraînement de RdAc que si un peu de lanthane est également précipité. Ce résultat peut être facilement expliqué, puisque l'hydroxyde ferrique précipite au pH 2 alors que l'hydroxyde de Th précipite au pH 3,5. Ainsi, pour continuer la concentration du RdAc, on se trouve dans la nécessité d'éliminer les sels de fer. Les méthodes les plus connues sont basées sur l'insolubilité des fluorures ou des oxalates de terres rares. Mais ces méthodes sont longues, car la mise en solution des fluorures ou des oxalates est pénible. J'ai préféré la méthode de séparation du Th par formation de carbonate double de ThAm soluble, ce qui permet de séparer dans une seule opération le RdAc des sels de La et de Fe qui précipitent sous forme de carbonates.

Comme le RdAc est présent en quantité infinitésimale, les phénomènes d'adsorption ont une grande importance, et au cours d'un traitement j'avais obtenu des résultats contradictoires en négligeant leur influence.

Pour les composés de fer, j'ai fait de nombreux essais au cours de traitements d'UX, et les conclusions sont les mêmes pour le RdAc. Si le fer est précipité à l'état de carbonate ferrique, il retient la majeure partie du RdAc, mais s'il est précipité sous forme de sulfure, tout le RdAc passe en solution.

Quelles que soient les conditions de précipitation, le carbonate de La retient toujours partiellement le RdAc, et mes essais ont été faits pour déterminer les conditions pratiques pour que l'adsorption soit réduite au minimum.

Pour 40 g de carbonate de soude et 0,288 de nitrate de LaUX, j'ai trouvé qu'une variation de concentration du carbonate de 40 g à 5 g au litre fait passer de 80 pour 100 à 4 pour 100 le rendement (pour 100 d'UX passé en solution).

Pour une même concentration, 40 g/l, le rendement augmente de 80 à 97 pour 100 lorsque pour une même quantité de nitrate de La + UX on emploie 10 fois plus de solution. Le rendement augmente un peu en remplaçant le carbonate de Na par du carbonate de K (80 à 88 pour 100), mais devient presque nul avec du sesquicarbonate d'Am (1 pour 100).

Ce résultat s'explique par le fait que le sesquicarbonate d'Am commercial correspond à la formule $2CO^3HAm$, $CO^3Am^2H^2O$ et que les bicarbonates sont défavorables à la dissolution de l'UX. En ajoutant de l'ammoniaque pour neutraliser le bicarbonate qui entre dans la composition du sesquicarbonate, on porte le rendement à 51 pour 100 et par un excès d'ammoniaque : 20 g de NH^3 pour 40 g de sesquicarbonate, on obtient un rendement de 87 pour 100. Par contre, un trop grand excès d'ammoniaque est défavorable. La présence de phosphates ou de fluorures est nuisible à la dissolution de l'UX et, dans un traitement, il faudra éliminer ces sels pour dissoudre complètement le RdAc.

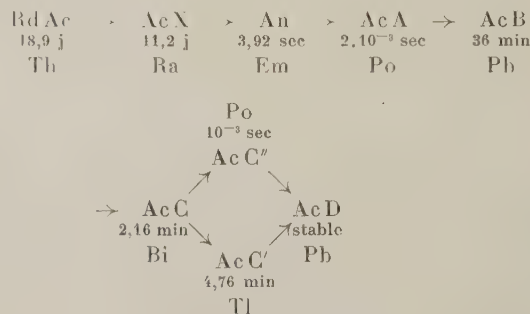
En résumé, pour l'extraction du RdAc, j'ai employé avec succès la méthode de précipitation fractionnée par les bases. La solution de nitrate de lanthane actinifère diluée (30 g de La^2O^3 au litre) est portée à l'ébullition et agitée continuellement, puis neutralisée jusqu'à début de précipitation. J'ai toujours précipité au minimum 2 pour 100 de lanthane initial. Il est bon de vérifier par un indicateur coloré, par exemple le bleu de bromophénol, que la solution se trouve à un pH supérieur à 3,5.

Si le précipité ne contient pas d'hydroxydes ferriques, on peut poursuivre sur la solution nitrique du précipité l'extraction du RdAc par la même méthode. Dans le cas contraire, la solution chlorhydrique du précipité est versée dans une solution contenant 40 g de sesquicarbonate d'Am, 100 cm³ d'ammoniaque par litre en employant un litre de solution par gramme de La^2O^3 et un excès de sulfure d'Am destiné à précipiter les sels ferriques.

Après filtration, le filtrat est additionné d'un sel de zirconium et porté à l'ébullition. L'ammoniaque est ainsi évaporée, le carbonate d'Am et le sulfure d'Am sont décomposés. On achève la décomposition par HCl, puis on élimine les sels de Zr par une précipitation à l'ammoniaque suivie d'une redissolution à FH dilué qui laisse sur filtre le RdAc fixé sur quelques milligrammes de terres rares.

Le choix du Zr comme support du RdAc se justifie par la solubilité des sels de Zr dans les solutions de carbonates alcalins. Ainsi sa présence évitera des pertes de RdAc dans les traitements ultérieurs. Finalement il sera facile de l'éliminer car les sels de Zr sont très solubles dans le FH dilué.

2. **Dosage par la mesure du rayonnement.** — Le RaAc émet des rayons α en se transformant en AcX qui se désintègre en une suite d'éléments à vie courte se terminant par l'AcD, isotope stable du Pb.



Dans tout ce qui va suivre, le rayonnement de l'AcX désigne le rayonnement de l'AcX et de ses dérivés

qui, étant à vie courte, sont rapidement en équilibre avec l'AcX. Par contre, le rayonnement du RdAc n'est attribuable qu'au RdAc.

Pour des produits peu actifs, on peut doser le RaAc par la mesure de son rayonnement α. Toutefois, il est alors nécessaire que l'AcX ait été complètement séparé, car l'AcX émet également des particules α. Cette méthode présente aussi l'inconvénient d'activer les chambres d'ionisation par le dégagement d'An. Pour les produits très actifs que j'ai eu à traiter, j'ai dosé le RdAc par le rayonnement β de l'AcX formé par désintégration du RdAc. Dans un produit contenant initialement Q_1 atomes de RdAc et Q_2 atomes d'AcX, les nombres q_1 et q_2 d'atomes de RdAc et d'AcX détruits par unité de temps au temps t sont donnés par

$$q_1 = \lambda_1 Q_1 e^{-\lambda_1 t},$$

$$q_2 = \lambda_2 Q_2 e^{-\lambda_2 t} + \lambda_1 Q_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}),$$

dont les courbes représentatives sont données à la figure 1 dans le cas particulier où $Q_2 = 0$ et en posant $\lambda_1 Q_1 = 100$.

L'activité β d'un produit de RdAc et d'AcX peut être représentée par $I_\beta = K_\beta x q_2$.

La mesure de l'activité β est donnée par le courant d'ionisation produit par 0,200 g de matière dans une chambre d'ionisation P. La matière est placée dans une cuvette métallique de 2 cm de diamètre, close par une lamelle de verre de 15/100 mm d'épaisseur.

Les facteurs

$$\frac{\lambda_2 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \text{et} \quad e^{-\lambda_2 t}$$

peuvent être calculés ou déterminés pour des temps quelconques en se reportant aux courbes de la figure 1. En mesurant un produit à 2 temps différents t et t' on pourra poser

$$\frac{I_\beta}{K_\beta} = \lambda_1 Q_1 l + \lambda_2 Q_2 m, \qquad \frac{I'_\beta}{K_\beta} = \lambda_1 Q_1 l' + \lambda_2 Q_2 m',$$

avec

$$l = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}], \qquad m = e^{-\lambda_2 t},$$

$$l' = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t'} - e^{-\lambda_2 t'}], \qquad m' = e^{-\lambda_2 t'},$$

système d'équations dont on peut tirer λ_1, Q_1, $\lambda_2 Q_2 - Q_1$ et Q_2 si l'on connaît K.

Il est d'usage d'évaluer les radioéléments en curies ou en sous-multiples de curie. Pour la famille du radium, on désigne par curie la quantité de n'importe quel radioélément qui se trouve en équilibre avec 1 g de Ra. Dans un curie de chaque radioélément il se détruit $3{,}7 \cdot 10^{10}$ atomes par seconde.

Pour les autres familles radioactives on désigne habituellement par curie la quantité de radioélément dont il se détruit $3{,}7 \cdot 10^{10}$ atomes par seconde.

M. Nahmias [1] a donné le rapport entre les courants d'ionisation produits par les rayonnements α et β du dépôt actif de l'Ac $I_\alpha = 270 I_\beta$. Le dépôt actif était placé à 5 cm de la chambre P. Dans un produit d'AcX en équilibre, s'il se détruit en une seconde un atome d'AcX, il se détruira dans le même temps un atome d'AcC et un atome d'AcC″ (en négligeant la formation d'AcC′, 0,2 pour 100).

Le courant d'ionisation produit dans une chambre à rayons α par un microcurie d'AcC disposé en couche mince est

$$I_\alpha = q \frac{ne}{2} = 1{,}67 \text{ U.E.S.}$$

q, nombre d'atomes détruits par seconde, $3{,}7 \cdot 10^4$;

n, nombre d'ions produits dans l'air par un rayon α d'AcC $1{,}90 \cdot 10^5$;

e, charge de l'électron $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ U.E.S.

Le rayonnement β correspondant à un millicurie d'AcC″ donne à 5 cm d'une chambre P un courant d'ionisation

$$I_{\beta_5} = 1{,}67 \cdot 10^{-3} \times \frac{1}{270} \times 0{,}86 \times 0{,}70 \times 0{,}73 = 2{,}72 \text{ U.E.S.}$$

Le rapport 270, donné par M. Nahmias, avait été déterminé par des mesures en couches minces. Le facteur 0,86 représente l'effet d'absorption du rayonnement β par les 0,200 g de matière. Le facteur 0,70 est introduit pour tenir compte de l'absorption du rayonnement β par la lamelle de verre de 15/100 de mm, le verre ayant une densité de 2,5.

M. Nahmias avait établi le rapport 270 en mesurant un dépôt actif d'actinium obtenu sur une plaque métallique de 3,5 cm de diamètre. Dans les disques que j'ai employés (profondeur 0,5 cm, diamètre 2 cm), le rayonnement subit une certaine canalisation qui diminue l'activité mesurée dans la chambre P. Le facteur 0,73 tient compte de cet effet.

Cette valeur de I représente aussi l'activité β d'un millicurie d'AcX, car pour les conditions de mesures indiquées ci-dessus, seul le rayonnement β de l'AcC″ peut intervenir.

Avec les mesures β faites à 40 cm de la chambre P, on a, pour un millicurie d'AcX,

$$I_{\beta_{40}} = 2{,}72 \text{ U.E.S.} \times 0{,}0288 = 0{,}079 \text{ U.E.S.}$$

Pour avoir plus de précision dans le dosage du radioactinium que j'ai fait par cette méthode, j'élimine soigneusement l'AcX par plusieurs précipitations à l'ammoniaque et le produit était mesuré quelques heures après.

Ainsi, on obtient une activité négligeable, ce qui

(1) M. NAHMIAS, *J. Chim. Phys.*, 26, 1929, p. 319.

donne $Q_2 = 0$. Une mesure faite 5 à 10 jours après permet de calculer Q_1.

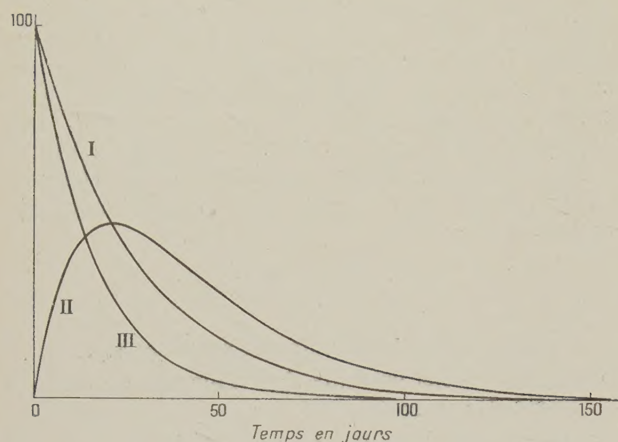


Fig. 1.

Courbe I : *Décroissance de* RaAc, nombre d'atomes transformés par unité de temps en pour cent du nombre initial ($\lambda_1 Q_1 = 100$).

Courbe II : *Formation d'*AcX *dans* RaAc, nombre d'atomes d'AcX transformés par unité de temps en prenant égal à 100 le nombre d'atomes transformés par unité de temps de RaAc au temps $t = 0$ ($\lambda_1 Q_1 = 100$).

Courbe III : *Décroissance d'*AcX, nombre d'atomes transformés par unité de temps en pour cent du nombre initial ($\lambda_2 Q_2 = 100$).

Une partie de mes essais étaient faits sur une solution de La contenant RdAc + AcX, et cette méthode de dosage pouvant être appliquée, j'ai pu ainsi calculer le rendement de mes opérations.

D'autres essais étaient faits à partir d'une solution de nitrate de lanthane actinifère. L'activité β de 0,200 g d'oxyde de lanthane actinifère variera en raison du nombre d'atomes d'Ac de RdAc et de AcX, et il sera nécessaire de faire des mesures à trois temps différents pour pouvoir déterminer le nombre d'atomes de RdAc. Je me suis borné à utiliser des solutions de nitrate de lanthane actinifère où l'Ac était en équilibre avec le RdAc et l'AcX. Dans ces conditions, une mesure de l'activité β donne le nombre d'atomes d'AcX, et comme le produit est en équilibre, on en déduit le nombre d'atomes de RdAc.

Le fait qu'il est nécessaire d'attendre quelques jours pour faire la deuxième mesure est assez gênant pour la préparation de RdAc, et j'ai cherché une méthode de mesure donnant immédiatement la teneur en RdAc.

Le RdAc émet un rayonnement γ mou qui donne, dans une chambre P, une ionisation suffisante pour servir de mesure au RdAc. Je désignerai par rayonnement γ mou le rayonnement γ filtré par une lame d'Al de 4 mm d'épaisseur qui arrête complètement le rayonnement β. Le rayonnement γ dur

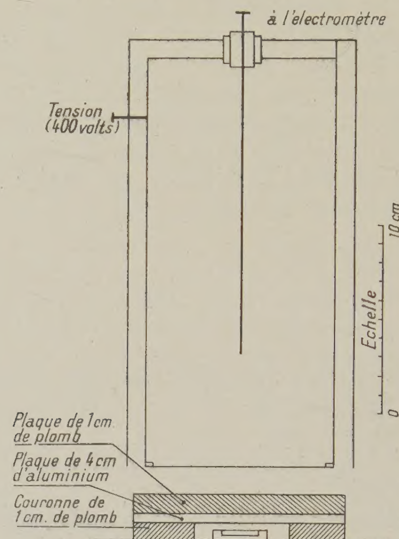


Fig. 2.

est filtré par 4 cm d'Al et 1 cm de Pb. Le produit est disposé comme il est indiqué sur la figure 2. J'ai suivi l'évolution d'un produit de RdAc exempt d'AcX en le mesurant à la chambre P en rayons β à 40 cm (β_{40}) en rayons γ mous à 5 cm ($\gamma_{5\,\text{mou}}$) et en rayons γ durs à 5 cm ($\gamma_{5\,\text{dur}}$)

Temps.	Activités des rayonnements exprimés en U.E.S.		
	β_0.	γ_5 mou.	γ_5 dur.
2 heures	0,048	0,35	0,0035
1 jour.......	0,424	0,402	0,0089
7 jours......	1,975	0,591	0,0288
21 »	2,920	0,664	0,0447
33 »	2,540	0,530	0,0360

Le rayonnement γ mou intervient très peu dans la mesure β_{40}. Toutefois, pour la mesure de 2 h, l'activité des rayons γ mou à 40 cm est de 0,024 U. E. S. pour une activité β_{40} de 0,048 U. E. S, mais après deux jours d'évolution, on pourra négliger cet effet.

J'ai admis que l'activité γ mou de la première mesure était due uniquement au RdAc et j'ai ainsi calculé pour chaque jour, à partir de cette valeur, l'activité γ mou due au RdAc. En déduisant cette activité calculée de l'activité mesurée, j'ai obtenu l'activité due à l'AcX. Les résultats ainsi obtenus

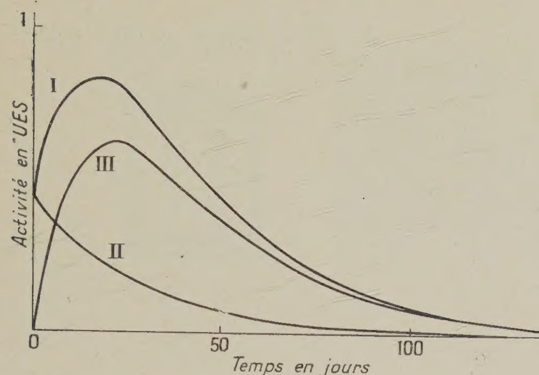


Fig. 3. — Activité du rayonnement γ filtré par 4 mm d'aluminium à 5 cm d'une chambre P (γ mou).

Courbe I : activité du rayonnement γ mou total (AcX + RdAc)

Courbe II : activité du rayonnement γ mou du RdAc, calculé d'après l'activité au temps $t = 0$.

Courbe III : activité du rayonnement γ mou de l'AcX par différence (I — II).

sont donnés dans la figure 3. La courbe III correspond tout à fait à la formation d'AcX dans un produit de RdAc, ce qui vérifie bien que le rayonnement γ mou de la première mesure devait bien être attribué exclusivement au RdAc.

L'AcX formé par désintégration du RdAc donne un rayonnement β dont la mesure du courant d'ionisation $I_{\beta_{40}}$ permet de calculer le nombre d'atomes d'AcX détruits par seconde à partir d'un temps quelconque, par exemple $t = 5$ jours. A partir de cette valeur, la théorie de transformations radioactives permet de calculer le nombre d'atomes de RdAc qui se détruisent par seconde au temps $t = 0$. On trouve ainsi qu'à $I_{\gamma 5\,\text{mou}} = 0{,}35$ U.E.S. correspond la désintégration de 2910.10^6 atomes de RdAc par seconde, soit : $K_{\gamma 5\,\text{mou}} = 1{,}2.10^{10}$ U.E.S. et $I_{\gamma 5\,\text{mou}} = 4{,}45.10^{-3}$ U.E.S. pour un millicurie de RdAc.

Ainsi, pour un produit de RdAc exempt d'AcX, la mesure de l'activité γ mou donnera le dosage du RdAc. Lorsque le produit contient de l'AcX, il faut tenir compte de l'activité $\gamma_{5\,\text{mou}}$ due à l'AcX, pour cela il suffit de mesurer l'activité β. J'ai établi dans les conditions expérimentales indiquées précédemment les facteurs qui permettent de passer pour l'AcX de l'activité $\gamma_{\beta_{40}}$ à l'activité $\gamma_{5\,\text{mou}}$

$$I_{\gamma 5\,\text{mou}} = I_{\beta 40} \times 0{,}17.$$

De I_β, on calcule $I_{\gamma\,\text{mou}}$ due à l'AcX que l'on déduit du courant d'ionisation expérimental. On obtient ainsi $I_{\gamma\,\text{mou}}$ relatif au RdAc. En divisant ce dernier résultat par

$$I = 4{,}45.10^{-3} \text{ U.E.S.},$$

on obtient le nombre de millicuries de RdAc contenu dans le produit.

On peut également doser le RdAc et l'AcX en mesurant le produit par le rayonnement γ mou et γ dur. En effet,

$$I_{\gamma\,\text{mou}} = K_{1\gamma\,\text{mou}} \lambda_1 Q_1 + K_{2\gamma\,\text{mou}} \lambda_2 Q_2,$$
$$I_{\gamma\,\text{dur}} = K_{1\gamma\,\text{dur}} \lambda_1 Q_1 + K_{2\gamma\,\text{dur}} \lambda_2 Q_2$$

et le système de ces deux équations permet de calculer $\lambda_1 Q_1$ et $\lambda_2 Q_2$. J'ai déterminé les coefficients K_1 et K_2 pour les deux rayonnements avec l'appareillage indiqué précédemment, le produit étant placé à 5 cm de la chambre P

$$\text{RdAc} \begin{cases} K_{1\gamma\,\text{mou}} = 1{,}2.10^{-10} \text{ U.E.S}, \\ K_{1\gamma\,\text{dur}} = 0{,}012.10^{-10} \text{ U.E.S.} \end{cases}$$

$$\text{AcX} \begin{cases} K_{2\gamma\,\text{mou}} = 3{,}66.10^{-10} \text{ U.E.S}, \\ K_{2\gamma\,\text{dur}} = 0{,}29.10^{-10} \text{ U.E.S.} \end{cases}$$

Pour un millicurie de chacun des deux radioéléments on a

$$\text{RdAc} \begin{cases} I_{1\gamma\,\text{mou}} = 4{,}45.10^{-3} \text{ U.E.S}, \\ I_{1\gamma\,\text{dur}} = 0{,}0445.10^{-3} \text{ U.E.S.} \end{cases}$$

$$\text{AcX} \begin{cases} I_{2\gamma\,\text{mou}} = 13{,}5.10^{-3} \text{ U.E.S}, \\ I_{2\gamma\,\text{dur}} = 1{,}07.10^{-3} \text{ U.E.S.} \end{cases}$$

Cette méthode est intéressante, car les conditions expérimentales ont beaucoup moins d'influence sur les mesures du rayonnement γ que sur les mesures du rayonnement β, et si l'on ne désire pas trop de précision, on pourra se servir des coefficients donnés ci-dessus pour un appareillage différent de celui pour lequel ces coefficients ont été mesurés.

En résumé, le rayonnement γ mou du RdAc peut servir pour doser cet élément, mais les produits de RdAc contiennent toujours de l'AcX qu'il faut aussi doser. En mesurant l'activité β, on a un dosage de l'AcX, ce qui permet de calculer dans l'activité la part due au RdAc et ainsi de doser le RdAc.

L'emploi de cette méthode est seulement limité par la sensibilité des mesures du rayonnement γ mou.

Quand le rayonnement est trop faible pour

pouvoir être mesuré avec précision, il faudra faire les mesures par le rayonnement β à 5 cm de la chambre P, à deux temps différents pour pouvoir calculer la teneur en RdAc. Lorsqu'on opère sur des produits très actifs, on pourra doser le RdAc en mesurant le produit par le rayonnement γ mou et γ dur.

En utilisant les procédés d'extraction chimique indiqués dans la première partie, nous avons pu faire des préparations de quelques milligrammes de matière contenant plusieurs dizaines de millicuries de radioactinium.

Je remercie vivement M. Debierne, Directeur de l'Institut du Radium, et Mme Joliot-Curie, Professeur, qui ont bien voulu, par leurs conseils, me guider dans ces recherches.

Manuscrit reçu le 24 avril 1942.